ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1919.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Matematica. — *Sopra una disuguaglianza fra i generi di una superficie algebrica.* Nota I di ANNIBALE COMESSATTI, presentata dal Corrisp. F. SEVERI [1].

1. Fin dal 1905 Castelnuovo ha dimostrato che una superficie algebrica i cui generi p_g, p_a soddisfano alla disuguaglianza $p_g \geq 2(p_a + 2)$ contiene un fascio irrazionale di curve [2]. Questo importante risultato è stato poi maggiormente precisato da Rosenblatt, il quale ha fatto vedere che, se si eccettuano le superficie contenenti un fascio di curve razionali (rigate) od ellittiche, e le superficie delle coppie di punti di due curve, una delle quali ha il genere 2, la disuguaglianza predetta può essere soddisfatta soltanto in corrispondenza a tipi che posson dirsi banali, e di cui rimane tuttavia dubbia l'esistenza [3].

Già da tempo il prof. Castelnuovo m'aveva cortesemente comunicata la previsione che i risultati ottenuti da Rosenblatt con metodo aritmetico-geometrico procedente da alcune disuguaglianze fondamentali della teoria delle

[1] Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1919.

[2] Castelnuovo, *Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XX (1905), pp. 55-60].

[3] Vedi la Nota di Rosenblatt, *Sur les surfaces irrégulières dont les genres satisfont à l'inégalité* $p_g \geq 2(p_a + 2)$ [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XXXV (1913), pp. 237-244] dove si trovano le citazioni di altri due lavori del medesimo A.

superficie algebriche, potessero ritrovarsi e maggiormente precisarsi spingendo più in là le conseguenze del procedimento trascendente con cui egli era pervenuto a stabilire l'esistenza del fascio irrazionale sulle superficie in questione.

L'autorevole previsione è stata confermata dalla ricerca, di cui nella presente Nota espongo la linea direttiva, la parte sostanziale dei principali ragionamenti, e le conclusioni, rimandando la parte di dettaglio e gli accessorî non essenziali ad altra pubblicazione.

2. La considerazione d'una superficie algebrica F con $p_g \geq 2(p_a + 2)$ conduce con Castelnuovo a studiare il comportamento di $q = p_g - p_a = n + 1$ funzioni di due variabili

$$u_1(xy)\,,\, u_2(xy)\,,\, \ldots\,,\, u_{n+1}(xy)\,,$$

(integrali picardiani di 1ª specie di F), indipendenti nel senso che nessuna loro combinazione lineare a coefficienti costanti può esser costante, fra i cui $\binom{n+1}{2}$ jacobiani $X_{ik} = \frac{D(u_i u_k)}{D(xy)}$ intercedono $m \geq \binom{n-1}{2} + 1$ relazioni lineari omogenee indipendenti, del tipo

$$(1) \qquad \sum a_{ik}^{(\nu)} X_{ik} = 0\,,$$

$$(i\,,k = 1\,,2\,,\ldots\,,n+1\,;\, i \neq k\,;\, \nu = 1\,,2\,,\ldots\,,m)\,,$$

a coefficienti costanti.

La condizione affinchè una combinazione lineare delle (1), cioè una relazione del tipo

$$(2) \qquad \sum \varrho_{ik} X_{ik} = 0\,,$$

esprima l'annullarsi dello jacobiano di una combinazione lineare delle u, e quindi l'esistenza di due integrali di 1ª specie di F funzioni uno dell'altro, è che i numeri ϱ_{ik} sian del tipo $\alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i$, cioè possano interpretarsi in uno spazio $S_d \left[d = \binom{n+1}{2} - 1 \right]$ come coordinate di un punto giacente sulla *grassmanniana* $W_{2(n-1)}$ delle rette di S_n. Ora il punto ϱ_{ik} è arbitrario entro lo spazio T di dimensione $m - 1$ individuato in S_d dagli m punti indipendenti $a_{ik}^{(\nu)}$, e perciò l'esistenza di coppie d'integrali funzionalmente dipendenti è legata a quella di punti comuni a T e alla $W_{2(n-1)}$, punti che esistono certamente, attesa la dimensione di T.

Di qui la conclusione di Castelnuovo; ma di più, la circostanza che lo spazio T e la $W_{2(n-1)}$ non hanno in comune un sol punto, ma un numero

finito >1 (se $n>2$) di punti (distinti o no) [1] o addirittura una varietà di dimensione >0, induce a prevedere che quella conclusione possa, per la stessa via, precisarsi ulteriormente.

3. Per procedere nella nostra indagine, conviene ora introdurre un'altra espressiva interpretazione geometrica. Dette $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ coordinate non omogenee di punto in un S_{n+1}, pongasi

$$y_i = u_i(xy), \qquad (i = 1, 2, \dots, n+1), \tag{3}$$

e si consideri il luogo descritto, al variare di x, y, dal punto y_i. Se quel luogo è una curva, le u_i risultan tutte funzionalmente dipendenti (cioè funzioni di una fra esse) e le relazioni (1) sono in numero di $\binom{n+1}{2}$ perchè ciascun jacobiano X_{ik} è identicamente nullo. Lasciato da parte questo caso, di cui terremo conto nelle conclusioni, il luogo considerato sarà una superficie Φ *appartenente* allo S_{n+1}, e le X_{ik} potranno interpretarsi come coordinate grassmanniane delle rette improprie dei suoi piani tangenti. Si vede poi facilmente che tale interpretazione geometrica è indipendente, sia da un cambiamento delle variabili x, y, come da una sostituzione lineare eseguita sulle u.

Le predette rette improprie formano un sistema K (congruenza o eventualmente rigata) *appartenente* allo S_n improprio di S_{n+1}, e contenuto negli m *complessi lineari* indipendenti rappresentati dalle equazioni (1).

L'annullarsi dello jacobiano d'una combinazione lineare delle u, cioè l'esistenza entro al sistema di relazioni (1) d'una relazione del tipo (2), dà luogo ad un complesso *speciale* del sistema lineare (1), contenente K. Un complesso siffatto è costituito da tutte le rette appoggiate ad un S_{n-2} (singolare); pertanto lo stesso accadrà delle rette di K, e quindi quello S_{n-2} sarà vertice di un cono (di ∞^1 S_{n-1}) contenente Φ. Più in generale, se h combinazioni lineari indipendenti $v_1, v_2, \dots, v_h$ delle u son funzioni di una fra esse, K ammette un S_{n-h} *direttore* vertice di un cono contenente Φ; e viceversa.

Collegando l'interpretazione geometrica ora esposta, colle considerazioni del numero precedente, risulta che gli S_{n-2} direttori di K sono in corrispondenza biunivoca coi punti comuni allo spazio T e alla $W_{2(n-1)}$, e quindi che le rette di K soddisfano a molteplici condizioni d'incidenza. Dall'analisi di esse ci proponiamo di dedurre che *le rette di* K *passano tutte per un punto o sono appoggiate ad una retta e ad un* S_{n-2} *sghembo con essa.* Supporremo $n>3$ riserbandoci di includere per via anche i casi $n = 1, 2, 3$.

[1] Se T ha la dimensione $m-1 = \binom{n-1}{2}$ ed è in posizione generica rispetto a $W_{2(n-1)}$ il numero dei punti comuni è $\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$ (Schubert).

3. Anzitutto non è difficile provare che fra le intersezioni di T con W si posson sempre trovare due punti infinitamente vicini. E invero, nell'ipotesi contraria, T e W avrebbero in comune $\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} > n$ punti distinti, e quindi esisterebbero altrettante relazioni funzionali fra coppie di combinazioni lineari delle u, cioè altrettanti S_{n-2} *distinti* direttori di K. Si prova allora, senza difficoltà sostanziali, che, se tutte le u non son funzioni di una fra esse (il che si è già escluso, ma d'altronde è inconciliabile coll'ipotesi che la varietà intersezione di T e W abbia dimensione zero), quelli S_{n-2} debbono passare tutti per un S_{n-h} $(h > 2)$ direttore di K. Ma allora posson sempre considerarsi due S_{n-2}, direttori di K, e infinitamente vicini, bastando per ciò che essi passino per lo S_{n-h}; e pertanto risulta assurda l'ipotesi che i punti comuni a T e W siano tutti distinti.

Dimostriamo ora che K ammette uno spazio direttore di dimensione $\leq n-3$. Invero, detti Σ e Σ' due S_{n-2} infinitamente vicini direttori di K, potranno darsi i due casi seguenti:

a) Σ e Σ' si tagliano in un S_{n-3}, e quindi giacciono in un S_{n-1}. Allora le rette di K, dovendo appoggiarsi a Σ e Σ' e non potendo giacere nello S_{n-1} (perchè K *appartiene* allo S_n), si appoggeranno tutte allo S_{n-3} intersezione che sarà quindi direttore per K.

b) Σ e Σ' si tagliano in un S_{n-4}; allora mediante una elementare considerazione di limite si vede che resta stabilita una proiettività fra gli S_{n-1} per Σ e gli S_{n-3} giacenti in Σ e passanti per lo S_{n-4}; e le rette appoggiate a Σ, Σ' son quelle che giacciono negli S_{n-1} suddetti e si appoggiano ai corrispondenti S_{n-3}.

Per le nostre funzioni la cosa s'interpreta nel modo seguente: Esistono quattro combinazioni lineari indipendenti v_1, v_2, v_3, v_4 delle u, tali che

$$v_2 = f(v_1) \quad , \quad v_4 = f'(v_1)\, v_3 + \varphi(v_1), \tag{4}$$

f e φ essendo simboli di convenienti funzioni.

Adunque sulla superficie algebrica F esisterà un fascio irrazionale di curve di livello costante per gl'integrali v_1, v_2. Detta C una curva del fascio, su cui sia $v_1 = c$, e posto $f'(c) = k$, $\varphi(c) = h$, avremo su C

$$v_4 - kv_3 = h,$$

cioè lungo C sarà costante anche l'integrale $v_4 - kv_3$. Applicando un teorema di de Franchis, se ne deduce che tutte le curve del fascio son di livello costante per l'integrale predetto [1], cioè che si ha $v_4 - kv_3 = \psi(v_1)$. Ma allora i tre integrali $v_1, v_2, v_4 - kv_3$ son funzioni di uno fra essi, e quindi K ammette un S_{n-3} direttore, c. d. d.

[1] De Franchis, *Alcune osservazioni sulle superficie irregolari* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XXXVI (1913), pp. 223-225, n. 3].