ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Matematica. — *Sui sistemi coniugati permanenti nelle deformazioni di una superficie.* Nota di ALESSANDRO TERRACINI, presentata dal Socio C. SEGRE [1].

È noto che sopra qualunque deformata di una quadrica il sistema coniugato permanente è isotermo coniugato [2]. Esistono altre superficie che godano della medesima proprietà? Rispondere a tale domanda, che mi fu posta dal prof. Bianchi, tale è lo scopo di questa breve Nota. La risposta è negativa [3].

Sia S_0 una superficie (non sviluppabile) cui spetti la proprietà indicata, riferita alle sue asintotiche, reali o immaginarie, u, v; e si consideri col Darboux [4] una famiglia (S) di ∞^1 superficie S, tutte applicabili su S_0, rappresentate in coordinate cartesiane ortogonali X, Y, Z da un'equazione

$$f(X, Y, Z, t) = 0 \tag{1}$$

t essendo un parametro tale che la (1), per $t = 0$, rappresenti S_0. Indicando con x, y, z le coordinate di un punto di S_0 (le quali risulteranno funzioni di u, v), le coordinate X, Y, Z del punto ad esso corrispondente su una superficie (1) si potranno riguardare, pel tramite di x, y, z, come funzioni di u, v, e ulteriormente di t. Si suppone inoltre di scegliere la famiglia (S) in modo che nell'intorno di $t = 0$ [in questo solo intorno si considererà la famiglia (S)] X, Y, Z siano della forma

$$\begin{aligned} X &= x(u, v) + t\bar{x}(u, v) + t^2 f(u, v, t), \\ Y &= y(u, v) + t\bar{y}(u, v) + t^2 g(u, v, t), \\ Z &= z(u, v) + t\bar{z}(u, v) + t^2 h(u, v, t), \end{aligned}$$

dove le funzioni considerate sono finite e continue colle loro derivate che occorreranno. Allora il punto di coordinate $x + t\bar{x}, y + t\bar{y}, z + t\bar{z}$ descrive una superficie che risulta da S_0 per una deformazione infinitesima; e disponendo opportunamente del sistema (S), quel punto può descrivere ogni superficie derivante in tal modo da S_0.

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1919.

(2) Cfr. p. es. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. III, § 85.

(3) Sistemi isotermi coniugati si presentano anche in un'altra proprietà caratteristica delle quadriche, relativa alle deformazioni infinitesime: cfr. Bianchi, *Sui sistemi coniugati permanenti nella deformazione delle quadriche*, Rend. Lincei (5), t. XXII (1913)$_2$, pp. 3-10; e la mia Nota, *Sulle congruenze* W *di cui una falda focale è una quadrica*, in « Scritti matematici offerti ad Enrico D'Ovidio », Torino, Bocca, 1919, pp. 149-157.

(4) Cfr. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*... IV Partie, Paris 1896, n. 852.

Se

$$\alpha(u, v, t)\, du^2 + 2\beta(u, v, t)\, du\, dv + \gamma(u, v, t)\, dv^2 = 0$$

è l'equazione delle asintotiche di una superficie S [sicchè $\alpha(u, v, o) = \gamma(u, v, o) = 0$], il sistema coniugato comune ad essa e alla S_0 sarà

$$\alpha(u, v, t)\, du^2 - \gamma(u, v, t)\, dv^2 = 0. \tag{2}$$

Ponendo $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$, $x_{uu} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, ecc. (una posizione analoga sarà mantenuta anche in seguito per le varie funzioni di u, v che si avranno da considerare), si ha

$$\alpha(u, v, t) = \begin{vmatrix} x_{uu} + t\,\overline{x}_{uu} + \cdots & x_u + t\,\overline{x}_u + \cdots & x_v + t\,\overline{x}_v + \cdots \\ y_{uu} + t\,\overline{y}_{uu} + \cdots & y_u + t\,\overline{y}_u + \cdots & y_v + t\,\overline{y}_v + \cdots \\ z_{uu} + t\,\overline{z}_{uu} + \cdots & z_u + t\,\overline{z}_u + \cdots & z_v + t\,\overline{z}_v + \cdots \end{vmatrix},$$

$$\gamma(u, v, t) = \begin{vmatrix} x_{vv} + t\,\overline{x}_{vv} + \cdots & x_u + t\,\overline{x}_u + \cdots & x_v + t\,\overline{x}_v + \cdots \\ y_{vv} + t\,\overline{y}_{vv} + \cdots & y_u + t\,\overline{y}_u + \cdots & y_v + t\,\overline{y}_v + \cdots \\ z_{vv} + t\,\overline{z}_{vv} + \cdots & z_u + t\,\overline{z}_u + \cdots & z_v + t\,\overline{z}_v + \cdots \end{vmatrix},$$

dove si sono trascurati i termini contenenti a fattore t^2. Per t tendente a zero, il sistema (2) tenderà quindi al sistema

$$\mathrm{A}(u, v)\, du^2 - \mathrm{C}(u, v)\, dv^2 = 0 \tag{3}$$

dove A, C indicano rispettivamente i coefficienti di t nelle espressioni sopra scritte per α, γ; sistema che in seguito alla ipotesi fatta dovrà risultare isotermo coniugato sopra la superficie S_0: vale a dire, supposto, ciò che si può fare, $\mathrm{C} \neq 0$ [v. la nota a pie' della pagina seguente] sarà A/C il prodotto di una funzione della sola u per una della sola v. Sarà perciò

$$\mathrm{C}^2(\mathrm{A}\mathrm{A}_{uv} - \mathrm{A}_u \mathrm{A}_v) - \mathrm{A}^2(\mathrm{C}\mathrm{C}_{uv} - \mathrm{C}_u \mathrm{C}_v) = 0. \tag{4}$$

Ora, rappresentata la S_0 con le formole di Lelieuvre

$$\left\{ \begin{aligned} x_u &= -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_u & \zeta_u \end{vmatrix}, & x_v &= \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix}, \\ y_u &= -\begin{vmatrix} \zeta & \xi \\ \zeta_u & \xi_u \end{vmatrix}, & y_v &= \begin{vmatrix} \zeta & \xi \\ \zeta_v & \xi_v \end{vmatrix}, \\ z_u &= -\begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \xi_u & \eta_u \end{vmatrix}, & z_v &= \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \xi_v & \eta_v \end{vmatrix}, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

dove ξ, η, ζ sono tre soluzioni linearmente indipendenti di una equazione

$$\theta_{uv} = \mathrm{M}(u, v)\,\theta, \tag{6}$$

si potrà assumere [1]

$$\left\{\begin{aligned} \overline{x}_u &= \begin{vmatrix} \xi & \mathrm{R} \\ \xi_u & \mathrm{R}_u \end{vmatrix}, & \overline{x}_v &= -\begin{vmatrix} \xi & \mathrm{R} \\ \xi_v & \mathrm{R}_v \end{vmatrix}, \\ \overline{y}_u &= \begin{vmatrix} \eta & \mathrm{R} \\ \eta_u & \mathrm{R}_u \end{vmatrix}, & \overline{y}_v &= -\begin{vmatrix} \eta & \mathrm{R} \\ \eta_v & \mathrm{R}_v \end{vmatrix}, \\ \overline{z}_u &= \begin{vmatrix} \zeta & \mathrm{R} \\ \zeta_u & \mathrm{R}_u \end{vmatrix}, & \overline{z}_v &= -\begin{vmatrix} \zeta & \mathrm{R} \\ \zeta_v & \mathrm{R}_v \end{vmatrix}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

essendo R una soluzione della (6); e la (4) dovrà sussistere in corrispondenza a ogni soluzione R della (6). Indicando per brevità il determinante

$$\begin{vmatrix} \overline{x}_{uu} & x_u & x_v \\ \overline{y}_{uu} & y_u & y_v \\ \overline{z}_{uu} & z_u & z_v \end{vmatrix}$$

col simbolo

$$|\,\overline{x}_{uu}\ ,\ x_u\ ,\ x_v\,|\,,$$

e facendo un'analoga convenzione per gli altri determinanti del terzo ordine che avremo a considerare, e ricavando $\overline{x}_{uu}, \overline{y}_{uu}, \overline{z}_{uu}$, $\overline{x}_{vv}, \overline{y}_{vv}, \overline{z}_{vv}$ dalle (7) opportunamente derivate, si ha [2]

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(u, v) = {} & |\,\xi\,\mathrm{R}_{uu} - \xi_{uu}\mathrm{R}\ ,\ x_u\ ,\ x_v\,| + \\ & + |\,\xi\,\mathrm{R}_u - \xi_u\mathrm{R}\ ,\ x_v\ ,\ x_{uu}\,| + |\,\xi\,\mathrm{R}_v - \xi_v\mathrm{R}\ ,\ x_u\ ,\ x_{uu}\,|\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{C}(u, v) = {} & -|\,\xi\,\mathrm{R}_{vv} - \xi_{vv}\mathrm{R}\ ,\ x_u\ ,\ x_v\,| + \\ & + |\,\xi\,\mathrm{R}_u - \xi_u\mathrm{R}\ ,\ x_v\ ,\ x_{vv}\,| + |\,\xi\,\mathrm{R}_v - \xi_v\mathrm{R}\ ,\ x_u\ ,\ x_{vv}\,|\,. \end{aligned}$$

I termini di A_u e di A_{uv} contenenti R_{uuu} saranno perciò rispettivamente

$$|\,\xi\,\mathrm{R}_{uuu} - \xi_{uuu}\mathrm{R}\ ,\ x_u\ ,\ x_v\,|$$

e

$$\begin{aligned} & |\,\xi_v\,\mathrm{R}_{uuu} - \xi_{uuu}\mathrm{R}_v\ ,\ x_u\ ,\ x_v\,| + \\ & + |\,\xi\,\mathrm{R}_{uuu} - \xi_{uuu}\mathrm{R}\ ,\ x_{uv}\ ,\ x_v\,| + |\,\xi\,\mathrm{R}_{uuu} - \xi_{uuu}\mathrm{R}\ ,\ x_u\ ,\ x_{vv}\,|\,, \end{aligned}$$

[1] Cfr. p. es. Bianchi, op. cit., vol. II, § 226.

[2] Sarà perciò $\mathrm{C} = 0$ solo per quelle R soluzioni della (6) che verificano una ulteriore equazione di Laplace, non certo identica giacchè il coefficiente di R_{vv} nella espressione di C non è identicamente nullo.

mentre R_{uuu} non compare in C, C_u, C_v, C_{uv}, A, A_v [le altre derivate terze e quarte di R che compaiono in queste espressioni si esprimono tutte, eccetto R_{vvv}, in funzione di R e delle sue derivate prime e seconde per mezzo della (6)]. Quindi poichè, come si è osservato, la (4) deve sussistere in corrispondenza a ogni soluzione R della (6), dovrà risultare nullo il coefficiente di R_{uuu} in $AA_{uv} - A_u A_v$, cioè dovrà essere

$$(|\xi R_{uu} - \xi_{uu} R, x_u, x_v| + |\xi R_u - \xi_u R, x_v, x_{uu}| + |\xi R_v - \xi_v R, x_u, x_{uu}|) \times$$
$$\times (|\xi_v, x_u, x_v| + |\xi, x_{uv}, x_v| + |\xi, x_u, x_{vv}|) = |\xi, x_u, x_v| A_v.$$

Anche questa relazione fra la R e le sue derivate R_u, R_v, R_{uu}, R_{vv} [la R_{uv} si elimina mediante la (6)] deve sussistere se R è una qualsiasi soluzione della (6) e perciò identicamente: in essa R_{vv} non compare nel primo membro, e, nel secondo, compare solo nel termine

$$|\xi, x_u, x_v| \cdot |\xi R_{vv} - \xi_{vv} R, x_u, x_{uu}|.$$

Perciò dovrà essere

$$|\xi, x_u, x_v| \cdot |\xi, x_u, x_{uu}| = 0.$$

Ora, poichè x, y, z sono soluzioni di un'equazione

$$\lambda_{uu} = \pi(u, v)\, \lambda_u + \chi(u, v)\, \lambda_v,$$

tale relazione porge

$$\chi(u, v)\, |\xi, x_u, x_v|^2 = 0;$$

e perciò, non essendo identicamente nullo il fattore di χ, sarà $\chi = 0$, e le asintotiche $v =$ cost. della S_0 saranno rettilinee. Siccome ciò vale anche per le asintotiche $u =$ cost., si conclude che S_0 è una quadrica.