ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

normale naturale spontanea costituzione del fiore dell' olivo medesimo e della non meno naturale spontanea distribuzione dei fiori nei diversi individui che compongono la specie olivo.

Questa normale esistenza dell'olivo staminifero, o cosiddetto maschio, è anche confermata da un fatto importantissimo di valore morfologico.

I fiori staminiferi dell'olivo, e anche quelli con pistillo assai ridotto, si distinguono di regola assai bene dai fiori monoclini, cosicchè anche l'individuo che li porta, quando è in fiore, ha nel suo complesso un aspetto differente. Mi limito a ricordare, ora, che le infiorescenze sono più lunghe, giungendo a $^1/_3$ a $^1/_2$ della lunghezza della foglia ascellante o anche quasi raggiungendola (mentre nel fiore monoclino le infioresenze sono brevi o brevissime, $^1/_4$ o meno della foglia ascellante); che le infiorescenze medesime sono più ramificate in basso e tendono quindi meglio ad assumere il carattere cimoso; che i fiori sono più numerosi; che il bottone è più grosso, sferico, più bianco, e il fiore aperto è più grande; che i fiori si distaccano e cadono interi (mentre i monoclini staccano soltanto la corolla con gli stami, lasciando il calice e il pistillo); che gli stami sono più grossi e più ricchi di polline, giallo; che il pistillo manca (e con esso gli ovuli) od è rappresentato da un mucroncino centrale.

Meccanica. — *Sopra alcuni casi singolari nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti.* Nota I di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO [1].

In una Nota precedente [2], alla quale mi riferisco per la parte bibliografica, trattando l'equivalenza fra le equazioni differenziali di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti, ho dimostrato per via intrinseca l'esistenza di due casi eccezionali per i quali l'equivalenza non sussiste.

Lo studio intrinseco di questi due casi è l'oggetto di questa Nota nella quale, utilizzando i risultati dello Stäckel e quelli da me ottenuti, riesco anche a risolvere alcune interessanti questioni che lo Stäckel, per difficoltà insormontabili di calcolo, non riuscì ad affrontare.

Per comodità del lettore credo opportuno riportare quelle formole della precedente Nota che è necessario tener continuamente presenti nello studio attuale.

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1919.

[2] O. Lazzarino, *Sull'equivalenza fra le equazioni differenziali di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti* [Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1919, vol. XXVIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 9 e 10, pp. 325 e 341].

Indicando con apici le derivate rispetto al tempo, con α l'omografia d'inerzia del giroscopio rispetto al punto fisso O, con Ω il vettore della velocità istantanea di rotazione, con $\mathbf{g}$ il vettore $G - O$ del baricentro G e con $\mathbf{k}_1$ un vettore unitario fisso nello spazio, diretto secondo la verticale e rivolto verso l'alto, alle sei equazioni di Euler-Poisson, sotto la nota forma cartesiana, si possono sostituire le due equazioni vettoriali [1]

$$(\mathrm{I}) \qquad (\alpha\Omega)' = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g}$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \mathbf{k}_1' = 0$$

ove, per semplicità di scrittura, si è supposto eguale ad uno il peso del corpo.

Inoltre, gl'invarianti principali S, T, U, introdotti da Hess, assumono rispettivamente la forma

$$(\mathrm{III}) \qquad \mathrm{S} = \mathbf{g} \times \alpha\Omega \quad , \quad 2\mathrm{T} = \Omega \times \alpha\Omega \quad ; \quad 2\mathrm{U} = \alpha\Omega \times \alpha\Omega$$

dove T rappresenta l'energia cinetica del sistema e U il modulo del vettore $\alpha\Omega$ che è il momento rispetto ad O dell'impulso. Le (III) dànno le proiezioni del vettore $\alpha\Omega$ secondo i vettori $\mathbf{g}$, Ω, $\alpha\Omega$ e sono invarianti nel senso che non dipendono da eventuali sistemi di coordinate, pur potendo essere, come effettivamente sono in generale, funzioni del tempo.

Dalle (III), derivando rispetto al tempo e tenendo conto della (I), si ricavano immediatamente le equazioni di Hess sotto la forma

$$(\mathrm{IV}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a) & \mathrm{S}' = \mathbf{g} \times \alpha\Omega' = \mathbf{g} \times \alpha\Omega \wedge \Omega \\ b) & \mathrm{T}' = \Omega \times \alpha\Omega' = \Omega \times \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} \\ c) & \mathrm{U}' = \alpha\Omega \times \alpha\Omega' = \alpha\Omega \times \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} \end{array} \right.$$

In virtù di queste formole, le equazioni di Schiff, che dànno le espressioni del vettore $\mathbf{k}_1$ e delle grandezze S', T', U' in funzione di S, T, U, si scrivono

$$(\mathrm{V}) \qquad (\mathbf{g} \wedge \alpha\Omega)^2 . \mathbf{k}_1 = (h - \mathrm{T})(2\mathrm{U}\mathbf{g} - \mathrm{S}.\alpha\Omega) + \\ + k(\mathbf{g}^2.\alpha\Omega - \mathrm{S}.\mathbf{g}) + \mathrm{U}'.\mathbf{g} \wedge \alpha\Omega$$

$$(\mathrm{VI}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a) & \mathrm{S}' = \mathbf{g} \times \alpha\Omega \wedge \Omega \\ b) & (\mathbf{g} \wedge \alpha\Omega)^2 . \mathrm{T}' = [\mathrm{S}(h - \mathrm{T}) - k\mathbf{g}^2]\,\mathrm{S}' + [2\mathrm{T}\,\mathbf{g}^2 - \Omega \times \mathbf{g}.\mathrm{S}]\,\mathrm{U}' \\ c) & \mathrm{U}'^2 = \mathbf{g}^2(2\mathrm{U} - k^2) - \mathrm{S}^2 + 2k\mathrm{S}(h - \mathrm{T}) - 2\mathrm{U}(h - \mathrm{T})^2 \end{array} \right.$$

dove

$$(\mathrm{VII}) \qquad (\mathbf{g} \wedge \alpha\Omega)^2 = 2\mathbf{g}^2\mathrm{U} - \mathrm{S}^2$$

[1] In questa Nota si è indicato con $\mathbf{k}_1$ il vettore $\mathbf{k}$ della Nota precedente per non confonderlo col vettore $\mathbf{k}$ della terna fondamentale $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ che interviene in seguito.

e le costanti h, k sono quelle degli integrali

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{cases} a) & g \times k_1 = h - T \\ b) & \alpha\Omega \times k_1 = k \end{cases}$$

Nella Nota sopra citata si è concluso che « *quando nè l'invariante U* « *nè l'invariante S sono costanti, cioè indipendenti dal tempo, sussiste* « *l'equivalenza fra le equazioni* (I) (II) *di Euler-Poisson e le equazioni* « (V) *e* (VI) *di Schiff* ». Quindi i due casi singolari, oggetto del presente lavoro, sono rispettivamente caratterizzati dalle condizioni

$$U = \text{costante} \quad , \quad S = \text{costante}.$$

Si è anche dimostrato, e giova qui ricordarlo, che « *se due qualunque* « *dei tre invarianti S, T, U sono costanti, risulta costante anche il terzo* « *ed i moti del giroscopio sono rotazioni permanenti* ».

1. Studio del caso in cui l'invariante principale U è costante. Sia U_0 il valore costante di U; dalla terza delle (III) si ha

$$(1) \qquad (\alpha\Omega)^2 = 2U_0 = \text{costante}$$

cioè « *il modulo del momento rispetto ad O dell'impulso si mantiene co-* « *stante durante il moto* ». Quindi, tenendo presente l'integrale (VIII_b), si vede che « *la prima curva d'impulso, descritta dal punto* $P = O + \alpha\Omega$, « *è in questo caso una circonferenza contenuta in un piano orizzontale e* « *col centro sulla verticale passante per O* ».

Inoltre, per $U' = 0$, dalla (IV_c) risulta

$$(2) \qquad g \wedge \alpha\Omega \times k_1 = 0$$

cioè « *i due vettori* g *ed* $\alpha\Omega$, *risultando complanari col vettore verti-* « *cale* k_1, *devono mantenersi, durante il moto, in un piano verticale* ».

Vediamo ora come si comportino in questo caso le equazioni (V) e (VI) di Schiff. La (V) dà

$$(\text{V}') \qquad (g \wedge \alpha\Omega)^2 . k_1 = (h - T)(2U_0 g - S . \alpha\Omega) + k(g^2 . \alpha\Omega - S . g)$$

e da qui, tenendo conto delle (III), si deduce per il vettore k_1 l'espressione

$$(\text{V}'') \qquad k_1 = (g \wedge \alpha\Omega)^{-2} . [(h - T)(\alpha\Omega \wedge g) \wedge \alpha\Omega + k(g \wedge \alpha\Omega) \wedge g].$$

La (VI_a) permette di esprimere il tempo in funzione di S mediante l'integrale abeliano

$$\int [dS/(g \wedge \alpha\Omega \times \Omega)]$$

e la (VI_c) porge una relazione algebrica fra S e T, cioè

$$(VI'_c) \qquad g^2(2U_0 - k^2) - S^2 + 2kS(h - T) - 2U_0(h - T)^2 = 0,$$

la quale permette di esprimere S in funzione di T, e viceversa. Ma la (VI_b) dà ora un'equazione che non è indipendente dalle altre, perchè può dedursi dalla (VI'_c). Infatti, tenendo conto della (VII), la (VI_b) dà, per $U' = 0$,

$$(VI'_b) \qquad (2g^2 U_0 - S^2)\,T' = [S(h - T) - kg^2]\,S'$$

e ponendo in questa equazione, al posto di g^2, l'espressione

$$g^2 = [S^2 - 2kS(h - T) + 2U_0(h - T)^2]/(2U_0 - k^2)$$

ottenuta dalla (VI'_c), si ricava, dopo qualche semplice riduzione,

$$(3) \qquad [kS - 2U_0(h - T)]\,T' = [k(h - T) - S]\,S'.$$

Ora è facile vedere che questa equazione può anche ottenersi direttamente dalla (VI'_c). Derivando, infatti, la (VI'_c) rispetto al tempo, si ha

$$-2SS' + 2k(h - T)\,S' - 2kST' + 4U_0(h - T)\,T' = 0$$

da cui, mettendo in evidenza T' ed S', si ottiene precisamente la (3).

Resta così dimostrato che la (VI'_b) è una conseguenza della (VI'_c) e si può quindi concludere che « per U = costante, poichè una delle equazioni « del sistema di Schiff diviene conseguenza delle altre, è necessario per la « equivalenza fra i sistemi di Schiff e di Euler-Poisson trovare una nuova « equazione, indipendente dalle altre, che possa sostituire la (VI_b) ».

Per tale scopo si osserva che, secondo quanto è stato dimostrato nella precitata Nota, quando il solo invariante U è costante sussiste certamente l'equivalenza fra le equazioni di Schiff e quelle di Euler, occorrendo per ciò che solo l'invariante S sia funzione del tempo, ma resta dubbio se dalle (VI) possa dedursi come conseguenza anche la (II) che equivale al noto sistema di Poisson.

Ora è facile vedere che, se alle due equazioni

$$(4) \qquad \mathbf{g} \times \mathbf{k}'_1 = 0 \quad , \quad \alpha\Omega \times \mathbf{k}'_1 = 0,$$

dedotte dalle equazioni (VI) di Schiff (v. l. c.), si associa la condizione

$$(5) \qquad \Omega \times \mathbf{k}'_1 = 0,$$

si ha un sistema che ammette come conseguenza necessaria la (II). Infatti dalle (4) e (5), le quali esprimono che le proiezioni del vettore $\mathbf{k}'_1$, su Ω, $\mathbf{g}$, $\alpha\Omega$ sono tutte nulle, si ha l'equazione

$$\Omega \times \mathbf{g} \wedge \alpha\Omega \,.\, \mathbf{k}'_1 = 0$$

e da questa, poichè è per ipotesi $S' = \Omega \times \mathbf{g} \wedge \alpha\Omega \neq 0$, segue necessariamente $\mathbf{k}'_1 = 0$ c. d. d.

Dopo ciò si può dire che « *quando l'invariante U è costante, cioè indipendente dal tempo, le equazioni di Euler sono conseguenza delle equazioni di Schiff; ma perchè sussistano anche quelle di Poisson è necessario e basta associare al sistema di Schiff l'equazione supplementare* (5) « *al posto della* (VI_b) *che in questo caso diviene conseguenza della* (VI_c) ».

Per ottenere l'espressione della (5) in funzione degli invarianti S, T, U si può procedere nel seguente modo: si deriva la (V) rispetto al tempo e, tenendo conto della (VII) e osservando che è $\mathrm{g}' = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathrm{g}$, si ha

$$\begin{aligned}(2\mathrm{U}_0 \mathbf{g}^2 - \mathrm{S}^2)\, \mathrm{k}_1' = 2\mathrm{SS}' \mathbf{k}_1 - \mathrm{T}' (2\mathrm{U}_0 \mathbf{g} - \mathrm{S}\,.\, \alpha \boldsymbol{\Omega}) + \\ + (h - \mathrm{T}) [2\mathrm{U}_0 .\, \Omega \wedge \mathrm{g} - \mathrm{S}' .\, \alpha\boldsymbol{\Omega} - \mathrm{S} .\, \mathrm{k}_1 \wedge \mathrm{g}] + \\ + k[\mathrm{g}^2 .\, \mathrm{k}_1 \wedge \mathrm{g} - \mathrm{S}' \mathbf{g} - \mathrm{S} .\, \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathrm{g}]\end{aligned}$$

dove, poichè per U costante sussiste la (I), si è posto $(\alpha \boldsymbol{\Omega})' = \mathrm{k}_1 \wedge \mathrm{g}$.

Moltiplicando ora questa relazione scalarmente per $\boldsymbol{\Omega}$ e tenendo conto delle (III), si ricava con qualche riduzione

$$\begin{aligned}(2\mathrm{U}_0 \mathrm{g}^2 - \mathrm{S}^2)^2\, \mathrm{k}_1' \times \boldsymbol{\Omega} = \\ = \mathrm{S}' \{ [2\mathrm{U}_0 (h - \mathrm{T}) - k\mathrm{S}] . [\mathrm{g} \times \boldsymbol{\Omega} . \mathrm{S} - 2\mathrm{g}^2 \mathrm{T}] - [\mathrm{S}(h - \mathrm{T}) - k\mathrm{g}^2]^2 \}\end{aligned}$$

e da qui, nell'ipotesi che sia diverso da zero il coefficiente $2\mathrm{U}_0 \mathrm{g}^2 - \mathrm{S}^2 = (\mathbf{g} \wedge \alpha \boldsymbol{\Omega})^2$ e poichè è $\mathrm{S}' \neq 0$, si ha la cercata espressione della (5), cioè

$$(5') \quad [2\mathrm{U}_0 (h - \mathrm{T}) - k\mathrm{S}] [\mathbf{g} \times \Omega . \mathrm{S} - 2\mathrm{g}^2 \mathrm{T}] - [\mathrm{S}(h - \mathrm{T}) - k\mathrm{g}^2]^2 = 0$$

e questa può anche scriversi, tenendo conto delle (III) e delle (VIII), sotto la forma

$$(5'') \quad \begin{aligned}(\alpha\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathrm{g}) \times (\alpha\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{k}_1) . (\mathrm{g} \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega}) \times (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathrm{g}) - \\ - [(\mathrm{g} \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega}) \times (\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g})]^2 = 0\end{aligned}$$

dalla quale risulta chiaro che nel caso escluso, $\mathbf{g} \wedge \alpha \boldsymbol{\Omega} = 0$, la (5') si annulla identicamente.

Per vedere ora come l'equazione supplementare (5) non possa essere in generale conseguenza della (VI'_c), basta dimostrare che non lo è in qualche caso particolare.

Consideriamo, ad esempio, il caso di un giroscopio assiale in cui il vettore $\mathrm{g} = \mathrm{G} - \mathrm{O}$ del baricentro sia parallelo ad uno degli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso O. Indicando con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tre vettori unitari paralleli ai detti assi, con A, B, C i corrispondenti momenti d'inerzia e supponendo

$$(6) \quad \mathrm{g} = \mathrm{G} - \mathrm{O} = \mathrm{i}$$

si ha

$$(7) \quad \mathrm{S} = \mathrm{g} \times \alpha \boldsymbol{\Omega} = \mathrm{A} . \boldsymbol{\Omega} \times \mathrm{i} = \mathrm{A} . \boldsymbol{\Omega} \times \mathrm{g}$$

da cui

$$\Omega \times g = S/A \tag{8}$$

e quindi la (VI'_c) e la $(5')$ possono rispettivamente scriversi

$$(2U_0 - k^2) - S^2 + 2kS(h - T) - 2U_0(h - T)^2 = 0 \tag{9}$$

$$[2U_0(h - T) - kS] . [S^2 - 2AT] - A[S(h - T) - k]^2 = 0 . \tag{10}$$

Ora è facile vedere che queste due equazioni, di secondo grado in $(h - T)$, sono tra loro *indipendenti*, comunque si scelgano i valori delle costanti h, k, U_0; basta per questo osservare che la loro risultante è una funzione razionale e intera di ottavo grado in S in cui il coefficiente di S^8 è A^2 cioè una quantità essenzialmente positiva e indipendente dai valori delle dette costanti. Inoltre, poichè le (9) e (10) sono due relazioni indipendenti fra S e T, si ha che gl' invarianti S e T devono essere *costanti* cioè indipendenti dal tempo, qualunque siano i valori delle costanti h, k, U_0. Ricordando poi che se i tre invarianti S, T, U sono costanti le rotazioni del giroscopio devono essere permanenti, si conclude che « *per U costante e per i giroscopi asimmetrici in generale, solo le rotazioni permanenti sono possibili* ».

Un caso particolare di questo teorema fu dimostrato da Hess [1] il quale trovò che « nei giroscopi assiali, per U costante e nell' ipotesi che sia « nulla la costante k dell' integrale delle aree, risulta costante anche l' inva- « riante S ».

Astronomia. — *Osservazioni fotometriche sopra la « Nova Aquilae » e su Giove.* Nota di G. Armellini, presentata dal Corrispondente A. Di Legge [2].

I. — Osservazioni fotometriche sopra la *Nova Aquilae*.

1. La *Nova Aquilae* fu scoperta, da quanto mi risulta, il 7 giugno 1918. Il suo splendore crebbe rapidamente in modo da giungere in pochissimi giorni alla grandezza 0,5 circa; e quindi la stella, con successive oscillazioni, andò lentamente declinando. Le misure fotometriche, che qui riporto, furono da me eseguite nell'Osservatorio della R. Università di Roma, sul Campidoglio, servendomi del fotometro estintore di Toepfer applicato ad un equatoriale di Merz. La costante K del fotometro, cioè il potere estintore

[1] Hess, *Bamberger Programm S. 29-30.* Mathem. Annalen, Bd. 37, S. 166.

[2] Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1919. Correggendo le bozze ho aggiunto le ultime osservazioni.