ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Premesso questo, si può risalire al metodo del Kronecker per la decomposizione di $f(x)$ in fattori irriducibili in $[\beta_1]$. Decomposto il prodotto

$$f(z+\lambda\beta_1)\,.\,f(z+\lambda\beta_2)\ldots f(z+\lambda\beta_n)$$

(che è funzione di z e λ a coefficienti razionali) in fattori irriducibili in $[1]$, e considerato uno di questi fattori, non primo con $f(z+\lambda\beta_1)$, che diciamo $\Theta(z,\lambda)$, cerchiamo il massimo comune divisore delle funzioni

$$f(z+\lambda\beta_1)\,,\ \Theta(z,\lambda)\,.$$

Poichè il fattore $\Theta(z,\lambda)$ è ovviamente un divisore del prodotto (2), per un certo indice l, il detto massimo comune divisore è un fattore $f_l(z+\lambda\beta_1\,,\beta_1)$ di $f(z+\lambda\beta_1)$, e il cambiamento di z in $x-\lambda\beta_1$ fa ottenere il fattore $f_l(x\,,\beta_1)$, irriducibile in $[\beta_1]$, di $f(x)$.

Resta così provata la validità, in tutti i casi, del metodo di Kronecker, nel quale λ interviene come parametro, affatto arbitrario; ciò che non sembra abbia convenientemente considerato il dott. Mazzoni formulando le sue obbiezioni.

L'ipotesi che la funzione $f(x)$ non abbia radici multiple, che del resto il Kronecker non pone esplicitamente come necessaria, risulta, come abbiamo visto superflua, sebbene possa essere utile, come anche l'altra, più restrittiva, della irriducibilità in $[1]$ della funzione, per semplificare il procedimento nell'applicazione pratica del metodo.

Matematica. — *Equazioni differenziali di Abel riducibili alle quadrature.* Nota di Pio Scatizzi S. J., presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Questa Nota fa seguito ad un'altra (¹) in cui si dimostrava che la equazione Euleriana

$$[1] \qquad \frac{d\Theta}{dx}+\frac{\Phi_1}{\Theta}+\Phi_2=0$$

poteva ricavarsi da un'equazione differenziale di Abel del tipo

$$[2] \qquad y'+Ay^3+By^2+Cy+D=0$$

(con A, B, C, D funzioni della sola x) quando su questa si fosse operata la trasformazione

$$[3] \qquad y=u+\frac{1}{\Theta}\varphi\,,$$

(¹) Dott. Pio Scatizzi S. J., *Soluzione di alcune equazioni del tipo di Abel* (questi Rendiconti, vol. XXVI, serie 5ª, 2° sem., fasc. 3°. Roma, agosto 1917).

essendo $\varphi = e^{\int [3Au^2 + 2Bu + C]\, dx}$ ed u un integrale particolare della [2], ed i coefficienti Φ_1 Φ_2 dati dalle formole

$$[\alpha] \qquad \Phi_1 = A\varphi^2 \quad , \quad \Phi_2 = [3Au + B]\,\varphi .$$

Facendo particolari ipotesi sopra questi coefficienti della [1], si ottengono altrettanti casi d'integrabilità per quadrature dell'equazione Abeliana [2]. Il sig. V. Z. Elliot, che più di tutti ha esaminato la presente questione sotto tale punto di vista, non sembra abbia raggiunto risultati pratici se non quando si orienta verso l'equazione di Jacobi. Perciò crediamo utile proseguire la ricerca con lo stesso metodo della Nota precedente in cui considerammo il caso $\Phi_2 = 0$. Esaminiamo ora due altri casi, cioè:

$$\text{(I)} \qquad \Phi_1 = \Phi \quad , \quad \Phi_2 = -\Phi ;$$

$$\text{(II)} \qquad \Phi_1 = -\tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\Phi^2 \, , \quad \Phi_2 = \frac{d}{dx}\Phi \, ,$$

essendo in ambedue Φ funzione arbitraria.

2. Nella ipotesi (I) l'equazione [1] corrispondente ha per integrale generale

$$[4] \qquad \Theta + \log[\Theta - 1] = -\int \Phi\, dx + H ,$$

essendo H costante arbitraria.

Ora, per la medesima ipotesi (I), viene ad introdursi nelle [α] il legame seguente:

$$[\beta] \qquad 3Au + B = -A\varphi$$

con $\varphi = e^{\int [3Au^2 + 2Bu + C]\, dx}$.

Dalla quale si vede che le quattro quantità A, B, C, u non possono rimanere tutte indipendenti, ma una qualunque di esse dovrà essere espressa in funzione delle rimanenti. A tale scopo poniamo

$$[\gamma] \qquad K = 3Au + B \quad \text{ed} \quad \eta = 3Au^2 + 2Bu + C .$$

Dalla [β] allora avremo facilmente la relazione

$$\frac{K'}{K} - \frac{A'}{A} = \eta$$

e, ricavando C, troviamo

$$[5] \qquad C = -u(K + B) - \frac{A'}{A} + \frac{K'}{K} .$$

Volendo fare una prima ipotesi su tale valore di C, possiamo porre $u=0$, ed otterremo allora

$$C=\frac{d}{dx}\log\left(\frac{B}{A}\right).$$

L'equazione [2], che potrà quindi integrarsi, sarà del tipo

$$[6]\qquad y'+Ay^3+By^2+\frac{d}{dx}\log\left(\frac{B}{A}\right)y=0,$$

con l'I. G.

$$\frac{e^{\int Cdx}}{y}+\log\left[\frac{e^{\int Cdx}}{y}-1\right]=-\int A\,e^{\int Cdx}\,dx+\text{Cost}.$$

Vale la pena di rilevare anche le due equazioni

$$[7]\qquad y'+ky^3+By^2+\frac{B'}{B}y=0,$$

$$[8]\qquad y'+Ay^3+ky^2-\frac{A'}{A}y=0,$$

che si sono ottenute aggiungendo ancora successivamente le ipotesi

$$A=B=k=\text{Cost}.$$

Altre questioni interessanti possono aversi col medesimo procedimento, facendo cioè varie ipotesi sopra gli elementi componenti la C nella [5]. Così, per mezzo delle tre posizioni

$$K=-B\quad,\quad K=A\quad,\quad K=0,$$

si sono potute ottenere successivamente le tre equazioni seguenti (in cui, a differenza di quanto accade nella [6], il termine noto non è zero):

$$[9]\qquad y'+Ay^3+By^2-\frac{d}{dx}\log\left(\frac{B}{A}\right)y=D,$$

con

$$D=\frac{d}{dx}\left[-\frac{2B}{3A}\right]+\frac{2B}{2A}\left[\frac{B^2(2A-9)}{9A^2}-\frac{d}{dx}\log\left(\frac{B}{A}\right)\right]$$

$$[10]\qquad y'+Ay^3+By^2+\frac{B^2-A^2}{3A}y=D,$$

essendo

$$D = \frac{d}{dx}\left[\frac{A-B}{3A}\right] + \frac{(A-B)^2}{27\,A^2}[5B+4A];$$

[11] $$y' + Ay^3 + By^2 + \frac{B^2 - 3A'}{3A}\,y = D,$$

in cui deve essere

$$D = \frac{d}{dx}\left[-\frac{B}{3A}\right] + \frac{B^2}{27\,A^2}[9A' - B].$$

3. Passando poi al secondo caso, risolviamo innanzi tutto la [1] in base alle ipotesi (II). L' I. G., che si presenta in termini finiti, è dato dalla seguente espressione:

$$\Phi = \frac{He^{\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctang}\left[\frac{1-\frac{2\Theta}{\Phi}}{\sqrt{3}}\right]}}{\sqrt{\left(\frac{\Theta}{\Phi}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}, \quad \text{con } H = \text{Cost.}$$

Considerando ora le posizioni (II), si vede subito che Φ_1 e Φ_2 non sono tra loro indipendenti, rimanendo legati dalla Φ. Eliminando questa, otteniamo la relazione:

$$\Phi = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right).$$

Sostituendo i valori di Φ_1 e Φ_2 secondo le [α] e ricordando le [γ], avremo

$$K\varphi = -\frac{d}{dx}\left[\frac{A}{K}\,\varphi\right].$$

Infine, tenendo conto della $\varphi' = \eta\varphi$, che segue immediatamente dalla seconda delle [3] e delle [γ], si ha

$$C = -u(K+B) + \frac{K^2}{A^2} + \frac{d}{dx}\log\left(\frac{K}{A}\right).$$

Analogamente al procedimento antecedente, se facciamo sopra gli elementi di questo valore di C le medesime ipotesi, ossia

$$K = -B \quad , \quad K = A \quad , \quad K = 0 \quad , \quad u = 0,$$

otterremo altre quattro equazioni differenziali, cioè

[12] $$y' + Ay^3 + By^2 + \left[\frac{B^2}{A^2} + \frac{d}{dx}\log\left(\frac{B}{A}\right)\right]y = D,$$

con

$$D = \frac{d}{dx}\left[-\frac{2B}{3A}\right] + \frac{2B}{3A}\left[\frac{B^2(A-9)}{9A^2} - \frac{d}{dx}\log\left(\frac{B}{A}\right)\right];$$

[13] $$y' + Ay^3 + By^2 + \left[1 - \frac{A^2 - B^2}{3A}\right] y = D,$$

essendo

$$D = \frac{d}{dx}\left[\frac{A-B}{3A}\right] + \frac{(A-B)}{27A^2}\left[(B-A)\,[2A-B] + 9A\right];$$

[14] $$y' + Ay^3 + By^2 + \frac{B^2 - 3A'}{3A}\, y = D,$$

dove

$$D = \frac{d}{dx}\left[-\frac{B}{3A}\right] + \frac{B}{27A^2}\left[9A' - B^2\right];$$

(15) $$y' + Ay^3 + By^2 + \left[\frac{B^2}{A^2} + \frac{d}{dx}\log\left(\frac{B}{A}\right)\right] y = 0\,.$$

4. Noto che l'algoritmo

$$\Theta - 1 = e^{-\int \Phi dx - e^{-\int \Phi dx - \cdots}}$$

fornisce soluzioni approssimate quanto si vuole per le equazioni del primo caso, purchè sia $0 < \int \Phi\, dx < \infty$, ed $e = 2{,}718281828459\ldots$

Così per l'equazione

$$y' = Ay^3 + By^2 + \frac{d}{dx}\log\left(\frac{B}{A}\right) y = 0$$

si avrà lo sviluppo

$$y = \cfrac{\frac{B}{A}}{1 + \cfrac{1}{e^{\int \frac{B^2}{A} dx + \cfrac{1}{e^{\int \frac{B^2}{A} dx + \cdots}}}}}$$