ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Matematica. — *Sulla ricerca delle funzioni primitive.* Nota II [1] di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

2. Indicheremo con $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots$ gli intervalli contigui all'insieme perfetto P [2], ordinati (per es.) in modo che le loro lunghezze non vadano mai crescendo; indicheremo poi con b'_n un qualsiasi punto di (a_n, b_n), distinto da a_n.

In ogni insieme perfetto P, *di* (a, b) *esiste almeno una porzione, sui cui intervalli contigui il rapporto*

$$\frac{f(b'_n) - f(a_n)}{b'_n - a_n} \tag{1}$$

ammette un limite superiore finito.

Supponiamo che, presi comunque un numero N ed una porzione di P, esistano sempre un intervallo contiguo (a_n, b_n) a tale porzione, e, in esso, un punto b'_n in modo da avere $f(b'_n) - f(a_n) \geq N(b'_n - a_n)$.

Sia n_1 il più piccolo valore di n che soddisfa la disuguaglianza ora scritta per $N = 2$; sia poi $b^{(1)}_{n_1}$ il massimo valore dei b'_n soddisfacenti alla stessa disuguaglianza, per $N = 2$ e $n = n_1$. Indichiamo con δ_1 il massimo intervallo, contenuto in (a, b), di lunghezza non superiore a $b^{(1)}_{n_1} - a_{n_1}$, avente per centro a_{n_1} e sul quale è sempre $f(b^{(1)}_{n_1}) - f(x) \geq b^{(1)}_{n_1} - x$, e con P_1 la porzione di P, di massima lunghezza, contenuta in δ_1. Sostituiamo P_1 a P e, facendo $N = 4$, determiniamo in modo analogo la porzione P_2 di P_1 su cui è sempre $f(b^{(1)}_{n_2}) - f(x) \geq 2(b^{(1)}_{n_2} - x)$. E così proseguiamo indefinitamente. Ciascuno degli insiemi perfetti $P, P_1, P_2, \ldots$ risulta contenuto in tutti quelli che lo precedono; esiste perciò almeno un punto p comune a tutti i P_n. Per essere $f(b^{(1)}_{n_r}) - f(a_{n_r}) \geq 2r(b^{(1)}_{n_r} - a_{n_r})$, l'indice n_r tende all'infinito per $r \longrightarrow \infty$, e si ha $b^{(1)}_{n_r} - a_{n_r} \longrightarrow 0$ e $b^{(1)}_{n_r} - p \longrightarrow 0$. Essendo poi $f(b^{(1)}_{n_r}) - f(p) \geq r(b^{(1)}_{n_r} - p)$, si ha $\Lambda(p) = +\infty$, contro l'ipotesi che sia sempre $\Lambda(x) < +\infty$.

3. *In ogni insieme perfetto* P, *di* (a, b), *esiste almeno una porzione* P_1 *tale che la serie* $\Sigma' \{f(b_n) - f(a_n)\}$, *limitata ai soli intervalli contigui ad essa, risulti assolutamente convergente.*

Scegliamo in P una porzione sulla quale $\Lambda(x)$ ammetta un limite superiore finito (n. 1), che diremo L'; su questa porzione scegliamone un'altra,

[1] Continuazione della Nota I (questi Rend., vol. XXIX, 1° sem., pp. 44-48).

[2] Gli estremi a_n e b_n sono dunque entrambi punti P, al quale insieme non appartiene nessun altro punto di (a_n, b_n).

P_1, sui cui intervalli contigui il rapporto (1) ammetta un limite superiore finito (n. 2), che diremo L''. Dimostriamo che la serie $\Sigma'\{f(b_n) - f(a_n)\}$, limitata ai soli intervalli contigui a P_1, è assolutamente convergente. Detto L un numero maggiore di L' e di L'', formiamo la funzione $F(x) \equiv \equiv f(x) - Lx$ e indichiamone con $\overline{\Delta}(x)$ il numero derivato superiore destro. È sempre $\overline{\Delta} = \Delta - L$ e quindi, su tutto P_1, $\overline{\Delta} < 0$. Inoltre, è sempre, sugli intervalli contigui a P,

$$\frac{F(b'_n) - F(a_n)}{b'_n - a_n} = \frac{f(b'_n) - f(a_n)}{b'_n - a_n} - L < 0,$$

$$F(b'_n) - F(a_n) < 0. \tag{2}$$

La serie $\Sigma'\{F(b_n) - F(a_n)\}$, limitata agli intervalli contigui a P_1, è dunque o convergente o divergente, e in questo secondo caso $= -\infty$. Supponiamola divergente, se è possibile. Detta Ω la massima oscillazione della $F(x)$ sull'insieme P_1, scegliamo un intero positivo m in modo che la somma delle differenze $F(b_n) - F(a_n)$, relative ai primi m intervalli contigui a P_1 (l'ordine in cui si considerano questi intervalli è quello stesso in cui essi figurano nella successione di tutti gli intervalli contigui a P), risulti minore di $-\Omega$. Questi primi m intervalli, disposti nell'ordine in cui si presentano su (a, b), siano $(a^{(1)}, b^{(1)})$, $(a^{(2)}, b^{(2)})$, ..., $(a^{(m)}, b^{(m)})$. Abbiamo

$$\sum_1^m \left\{ F(b^{(r)}) - F(a^{(r)}) \right\} < -\Omega.$$

Affermiamo che è $F(b^{(r)}) > F(a^{(r+1)})$. Essendo $b^{(r)}$ un punto di P_1, è $\overline{\Delta}(b^{(r)}) < 0$, onde, per ogni h positivo, sufficientemente piccolo, $F(b^{(r)}) > > F(b^{(r)} + h)$. Indichiamo con $c^{(r)}$ il massimo valore di $b^{(r)} + h$ che non supera $a^{(r+1)}$, soddisfa alla disuguaglianza scritta e corrisponde a un punto di P_1. Se fosse $c^{(r)} < a^{(r+1)}$, $c^{(r)}$ non potrebbe coincidere col primo estremo di un intervallo contiguo a P_1, perchè, per la (2), esso non sarebbe il massimo dei valori indicati; e non potrebbe neppure essere un altro punto di P_1 perchè, avendosi $\overline{\Delta}(c^{(r)}) < 0$, esso non darebbe ancora il massimo dei valori detti. È dunque $c^{(r)} = a^{(r+1)}$, da cui $F(b^{(r)}) \geq F(a^{(r+1)})$. Da ciò si trae

$$F(b^{(m)}) - F(a^{(1)}) = \sum_1^m \{F(b^{(r)}) - F(a^{(r)})\} +$$
$$+ \sum_1^{m-1} \{F(a_{r+1}) - F(b_r)\} \leq \sum_1^m \{F(b^{(r)}) - F(a^{(r)})\} < -\Omega,$$

il che contraddice al fatto che Ω è la massima oscillazione della F sull'insieme P_1. La serie $\Sigma'\{F(b_n) - F(a_n)\}$, estesa agli intervalli contigui a P_1, è dunque convergente e convergente assolutamente, e tale è necessariamente anche $\Sigma'\{f(b_n) - f(a_n)\} = \Sigma'\{F(b_n) - F(a_n)\} + L\,\Sigma'(b_n - a_n)$.

4. *Sulla porzione* P_1, *considerata al numero precedente,* $\Delta(x)$ *è integrabile nel senso del Lebesgue e vale l'uguaglianza*

$$(3) \qquad f(p^{(1)}) - f(p^{(0)}) = \int_{P_1} \Delta(x)\, dx + \Sigma' \{ f(b_n) - f(a_n) \},$$

dove la serie è estesa soltanto agli intervalli contigui a P_1, *e* $p^{(0)}$ *e* $p^{(1)}$ *indicano il primo e il secondo estremo di* P_1.

Siccome è

$$L(p^{(1)} - p^{(0)}) = L \int_{P_1} dx + L\Sigma'(b_n - a_n),$$

basterà dimostrare che, su P_1, è integrabile $\overline{\Delta}(x)$ e che la formula (3) vale per la $F(x)$.

Rammentiamo che è, in ogni punto di P_1, $\overline{\Delta} < 0$ e che vale, sugli intervalli contigui a P_1, la (2).

Preso un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, indichiamo con e_r $(r = 1, 2, \ldots)$ l'insieme dei punti di P_1 in cui è $-r\varepsilon \leq \overline{\Delta} < -(r-1)\varepsilon$, e con $m(e_r)$ la sua misura. Scelto poi un intero positivo N, sufficientemente grande perchè la somma dei primi N termini della serie Σ' — somma che indicheremo con Σ'' — risulti minore della serie stessa aumentata di ε, indichiamo con e_0 l'insieme somma di tutti gli e_r di indice $r > N$ e dell'insieme dei punti di P_1 in cui è $\overline{\Delta} = -\infty$. Rinchiudiamo i punti di e_r $(r = 0, 1, 2, \ldots, N)$ in un sistema numerabile Δ_r di intervalli, senza parti comuni, di $(p^{(0)}, p^{(1)})$, in modo che ogni punto dell'insieme sia *interno* all'intervallo che lo contiene e che la misura complessiva $m(\Delta_r)$ di tutti gli intervalli di Δ_r soddisfi alla doppia disuguaglianza

$$(4) \qquad 0 \leq m(\Delta_r) - m(e_r) < \frac{\varepsilon}{N^3}.$$

Attribuiamo ora ad ogni punto di $(p^{(0)}, p^{(1)})$ un intervallo appartenente a questo segmento e avente il primo estremo nel punto considerato, con la seguente regola. Al primo estremo di un intervallo contiguo a P_1 attribuiamo lo stesso intervallo contiguo che lo contiene; ad un punto p di e_r $(r = 0, 1, 2, \ldots N)$, non di quelli già considerati, attribuiamo il massimo intervallo appartenente a quello del sistema Δ_r che contiene p e tale che in esso non sia contenuta nessuna parte dei primi N intervalli contigui a P_1, e che il suo secondo estremo p' appartenga all'insieme P_1 e soddisfi alla prima o alla seconda delle due disuguaglianze

$$(5) \qquad \frac{F(p') - F(p)}{p' - p} \leq -(r-1)\varepsilon \quad , \quad \frac{F(p') - F(p)}{p' - p} \leq -N\varepsilon,$$

secondo che è $r > 0$ oppure $r = 0$ [1]. Gli intervalli così definiti hanno tutti ambedue gli estremi su P_1 e con essi, partendo da $p^{(0)}$, possiamo ricoprire $(p^{(0)}, p^{(1)})$ con una catena di intervalli, in modo che ciascun intervallo della catena abbia come primo estremo il secondo estremo del precedente oppure il limite superiore dei secondi estremi dei precedenti [2]. Se (p, p') è un intervallo qualsiasi della catena, per la (2) e per le due disuguaglianze precedenti, abbiamo $F(p') - F(p) \leq 0$, e la serie

$$S = \Sigma \{ F(p') - F(p) \},$$

estesa a tutti gli intervalli della catena, risulta assolutamente convergente e avente per somma $F(p^{(1)}) - F(p^{(0)})$. Fra gli intervalli della catena figurano poi sicuramente i primi N intervalli contigui a P_1, così che fra i termini della serie S figurano tutti quelli di $\Sigma'' \{ F(b_n) - F(a_n) \}$.

Indichiamo con Δ'_r l'insieme degli intervalli della catena che hanno come primo estremo un punto di e_r $(r = 0, 1, \ldots, N)$ non primo estremo di un intervallo contiguo a P_1, e con $m(\Delta'_r)$ la misura complessiva di tali intervalli. I punti di e_r non contenuti negli intervalli di Δ'_r e che non siano primi estremi di intervalli contigui a P_1, sono contenuti negli intervalli dei sistemi $\Delta'_{r'}$, con $r' \neq r$ e quindi in quelli dei $\Delta_{r'}$ corrispondenti. Per la (4), la misura del loro insieme è pertanto minore di $\frac{\varepsilon}{N^3} \cdot N = \frac{\varepsilon}{N^2}$, ed è così $m(\Delta'_r) > m(e_r) - \frac{\varepsilon}{N^2}$, da cui si trae, per $0 < r \leq N$,

$$-(r-1)\varepsilon\, m(e_r) + \frac{\varepsilon^2}{N} \geq -(r-1)\varepsilon\, m(\Delta'_r),$$

$$-\varepsilon \sum_1^N (r-1)\, m(e_r) + \varepsilon^2 \geq -\varepsilon \sum_1^N (r-1)\, m(\Delta'_r)$$

e, per la prima delle (5),

$$-\varepsilon \sum_1^N (r-1)\, m(e_r) + \varepsilon^2 \geq \Sigma_1 \{ F(p') - F(p) \},$$

dove la serie Σ_1 è estesa a tutti gli intervalli della catena che hanno per primo estremo un punto di e_r $(r = 1, 2, \ldots N)$ e che non coincidono con un intervallo contiguo a P_1. Da questa disuguaglianza e da un'osservazione fatta più sopra, scende

$$(6) \quad -\varepsilon \sum_1^N (r-1)\, m(e_r) + \Sigma'' \{ F(b_n) - F(a_n) \} + \varepsilon^2 > S = F(p^{(1)}) - F(p^{(0)}),$$

[1] Si rammenti che è $\overline{\Delta}(p) < -(r-1)\varepsilon$ se $r > 0$, e $\overline{\Delta}(p) < -N\varepsilon$ se $r = 0$.

[2] Cfr. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Paris, Gauthier-Villars, 1904, pag. 63).

ed anche $-\varepsilon \sum_{1}^{N} (r-1)\, m(e_r) > F(p^{(1)}) - F(p^{(0)}) - \varepsilon^2$. Questa disuguaglianza, essendo verificata per tutti gli N sufficientemente grandi, mostra che è $-\varepsilon \sum_{1}^{\infty} (r-1)\, m(e_r) \geq F(p^{(1)}) - F(p^{(0)}) - \varepsilon^2$ e quindi che $\overline{A}(x)$, che su P_1 è sempre < 0, è su tale insieme integrabile. Avendosi poi $\int_{P_1} \overline{A}\, dx > -\varepsilon \sum_{1}^{\infty} (r-1)\, m(e_r) - \varepsilon\, m(P_1)$, e passando in (6) al limite per $N \longrightarrow \infty$, si ottiene

$$\int_{P_1} \overline{A}\, dx + \Sigma' \{F(b_n) - F(a_n)\} + \varepsilon^2 + \varepsilon\, m(P_1) \geq F(p^{(1)}) - F(p^{(0)}),$$

e, poichè ε è arbitrario,

$$\int_{P_1} \overline{A}\, dx + \Sigma' \{F(b_n) - F(a_n)\} \geq F(p^{(1)}) - F(p^{(0)}).$$

Questa disuguaglianza vale evidentemente anche su ogni porzione di P_1, per modo che, se x indica un punto di P_1, non secondo estremo di un intervallo contiguo all'insieme, e poniamo $\varphi \equiv \overline{A}$ su P_1 e $\varphi \equiv 0$ altrove, abbiamo

$$\int_{p^{(0)}}^{x} \varphi\, dx - \Sigma'_x \{F(b_n) - F(a_n)\} \geq F(x) - F(p^{(0)}), \tag{8}$$

dove la serie Σ'_x è estesa agli intervalli contigui alla porzione di P_1 compresa fra $p^{(0)}$ e x. Se poi x indica un punto appartenente ad un intervallo (a_m, b_m) contiguo a P_1, ponendo $\Sigma'_x = \Sigma'_{a_m} + \{F(x) - F(a_m)\}$, e applicando la precedente disuguaglianza a $x = a_m$, abbiamo che la stessa disuguaglianza è valida per ogni x di $(p^{(0)}, p^{(1)})$.