ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 febbbraio 1920.

R Lanciani, Socio anziano, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sugli incroci delle curve di diramazione per una funzione algebrica di due variabili.* Nota del dott. Oscar Chisini, presentata dal Corrisp. F. Enriques.

1. Sia data un'equazione algebrica

$$f(xyz) = 0$$

di grado n in z, la quale definisce così z come funzione ad n valori del punto (xy); e sia

$$D(xy) = 0$$

la curva di diramazione ad essa relativa. La curva D si comporrà in generale di più curve irriducibili; e noi supporremo che due di tali curve, a e b, o (ciò che differenzialmente è equivalente) due rami lineari di una stessa curva, s'incrocino in un punto P_o, per cui passino semplicemente e con tangenti distinte. Si tratta qui di esaminare le sostituzioni A e B, secondo cui si permutano i valori della funzione algebrica z, in relazione alle due curve a e b, nell'intorno del punto P_o.

Precisamente faremo vedere che *le due sostituzioni* A e B *sono permutabili fra loro* (1), generando un gruppo abeliano. E in una seconda nota

(1) In un'altra nota vedremo che cosa succede se le a e b si toccano: allora — nell'ipotesi di un contatto r-punto — le A e B risultano permutabili con $(BA)^r$; e quindi si deduce il contatto di a e b note che siano A e B.

potremo dedurre *gli sviluppi in serie che dànno la rappresentazione analitica di una falda della superficie* $f(xyz) = 0$, nell'intorno di un punto che corrisponda a un incrocio di due curve di diramazione.

E giova qui dire che la singolarità delle superficie, che risponde al tipo sopra caratterizzato, ha importanza per la teoria generale, poichè a questo tipo di incroci può ridursi ogni singolarità puntuale di una superficie, mediante trasformazioni quadratiche dello spazio, come mostreremo in un altro lavoro di prossima pubblicazione.

2. Sia dunque P_o un punto d'incrocio di due curve di diramazione a e b (o di due rami lineari) facenti parte della $D(xy) = 0$, e passanti per esso con tangenti distinte; e siano $x_o = 0$, $y_o = 0$, le sue coordinate.

Mettendo in evidenza le parti reali e immaginarie delle due variabili complesse x e y, poniamo

$$x = x_1 + i x_2 \ , \ y = y_1 + y_2 \ ,$$

dove ora x_1, y_1, x_2, y_2, sono variabili *reali*.

Ogni punto di coordinate reali o complesse del piano (xy) verrà rappresentato da un punto dello spazio a quattro dimensioni Σ, i cui punti sono definiti dalla quaterna di coordinate $(x_1 x_2 y_1 y_2)$; e, in particolare, al punto P_o risponderà in Σ il punto O di coordinate $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$.

Alla curva di diramazione $D(xy) = 0$, corrisponderà una *superficie* Δ, la quale passerà per O con due falde, Δ_a e Δ_b, corrispondenti rispettivamente alle due componenti a e b della curva D.

Nello spazio Σ considereremo esclusivamente i punti soddisfacenti alla disuguaglianza

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 < h^2 ,$$

cioè i punti interni ad una ipersfera Ω di centro O e di raggio h, nella quale la superficie Δ si componga solamente delle due falde Δ_a e Δ_b, e queste vi restino distinte ed abbiano come solo punto comune il punto O.

Sia ora H un punto generico di Σ, interno all'ipersfera Ω: ad esso corrisponderanno, in virtù dell'equazione $f(xyz) = 0$, n valori di z: $z_1, z_2, z_3 \dots z_n$, che saranno distinti fra loro.

Facciamo descrivere ad H una linea chiusa Γ_a che avvolga una volta la superficie Δ_a: una tale linea si può ottenere prendendo un piano per H che intersechi la Δ_a in un punto Q, e prendendo in questo un cappio uscente da H ed avvolgente il punto Q e questo solo. Accanto a questo cappio si può considerare ogni altro da esso ottenuto per continuità, senza incontrare nessun altro punto della Δ_a o della Δ_b.

Quando H descrive in un senso determinato il cappio Γ_a, ritornando in sè stesso, gli n valori $z_1, z_2, z_3 \dots z_n$ si permuteranno secondo una certa sostituzione che indichiamo con A. Similmente indichiamo con B la sosti-

tuzione che si ottiene facendo descrivere ad H un cappio Γ_b, il quale avvolga una volta la superficie Δ_b. Vogliamo dimostrare che, nella nostra ipotesi, *le due sostituzioni* A e B *sono fra loro permutabili.*

A tale oggetto si consideri sopra la superficie Δ_a una linea chiusa e senza nodi, L_a, la quale avvolga il punto O, e si consideri una varietà V a tre dimensioni (senza singolarità nell'intorno di O) contenente L_a, il punto H, ma non altri punti i Δ_a: questa varietà interesserà Δ_b secondo una linea L_b.

La regione di V, interna all'ipersfera Ω, è topologicamente identica al nostro spazio e possiamo quindi senz'altro supporre che sia una regione di esso.

La linea chiusa L_a potremo ridurla a un cerchio, e la linea L_b, la quale ha un punto comune con la regione di Δ_a interna a L_a, avrà anche un punto comune con la regione di piano interna al cerchio L_a, e quindi, considerando solo la parte di essa prossima a detto cerchio, potremo ridurla ad un segmento intersecante l'interno del cerchio in un punto R.

A maggior chiarimento di una simile deduzione, può convenire un esame analitico. Con una trasformazione del piano $(x\,y)$ regolare nell'intorno del punto $P_o = (00)$, la quale lascia quindi invariati i caratteri topologici degli enti che ci interessano, possiamo ridurre le due curve a e b ad essere rappresentate da

$$y = 0, \text{ e } x = 0 \text{ (}^1\text{)};$$

sicchè la superficie Δ_a è un piano di equazioni

$$y_1 = y_2 = 0,$$

e la Δ_b un altro piano di equazioni

$$x_1 = x_2 = 0.$$

Prendiamo come varietà V la quadrica

$$y_1 + y_2 = \left(x_1 - \frac{h}{4}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{h}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

e facciamone la proiezione stereografica dal punto all'infinito dell'asse y_2, sopra lo spazio a tre dimensioni $(x_1\, x_2\, y_1)$; allora l'intersecazione di V con il piano Δ_a viene proiettata nel cerchio

$$y_1 = 0, \qquad \left(x_1 - \frac{h}{4}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{h}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 = 0,$$

(1) Se $y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ è lo sviluppo del ramo a, ed $y = b_1 x + b_2 x^2 \ldots$ è lo sviluppo del ramo b, $(a_1 \neq b_1)$, la trasformazione richiesta è:

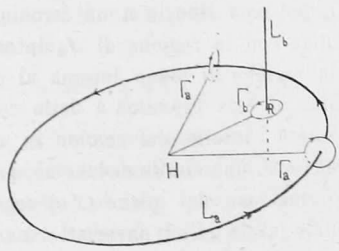
$$y' = y - a_1 x - a_2 x^2 \ldots,$$
$$x' = y - b_1 x - b_2 x^2 \ldots.$$

e l'intersezione di V con il Δ_b viene proiettata nell'asse y_1, cioè nella retta,

$$x_1 = 0 \ , \ x_2 = 0,$$

la quale è perpendicolare al piano del cerchio e risulta a questo interna.

Essendoci così ridotti a uno spazio a tre dimensioni, riferiamoci all'unita figura. Prendiamo come origine dei cappî il punto H, centro del cerchio L_a, e come cappî Γ_a e Γ_b avvolgenti le falde Δ_a e Δ_b, i cappî segnati, i quali avvolgono le linee L_a e L_b (appartenenti rispettivamente a Δ_a e Δ_b) nel senso indicato. Oltre a questi due cappî, si consideri anche il cappio Γ'_a, che avvolge la L_a. Facciamo ora variare il cappio Γ_a, sino



a farlo coincidere con Γ'_a, e ciò ruotando il piano verticale che lo contiene (perpendicolare al piano orizzontale contenente L_a) intorno all'asse del cerchio L_a, in modo che il centro del cerchietto che forma il cappio descriva la L_a nel senso indicato dalla freccia. In questo passaggio il cappio viene a tagliare la retta L_b, e si riconosce immediatamente, dalla figura, che il cappio Γ'_a è equivalente alla somma $\Gamma_b^{-1} + \Gamma_a + \Gamma_b$.

Segue che al cappio L'_a corrisponde una sostituzione

$$A' = BAB^{-1}.$$

Ma, d'altra parte, il cappio Γ'_a è equivalente al cappio Γ_a, potendosi ridurre a questo senza incontrare L_a nè L_b, ove si faccia ruotare il piano verticale, che lo contiene, intorno all'asse del cerchio L_a, nel senso indicato dalla freccia. Si ha dunque

$$A' = A,$$

e quindi

$$A = BAB^{-1};$$

cioè le sostituzioni A e B sono permutabili fra loro, come volevamo dimostrare.