ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Idromeccanica. — *Sull'integrazione dell'equazione caratteristica dei piccoli moti ondosi in un canale di qualunque profondità.* Nota I di U. CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Ho mostrato, in uno studio precedente [1], che il problema dei piccoli moti ondosi in un canale a fondo rettilineo di profondità h, si può far dipendere dalla integrazione della seguente equazione:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{f(t;z+ih)+f(t;z-ih)\right\}+ig\frac{\partial}{\partial z}\left\{f(t;z+ih)-f(t;z-ih)\right\}=0,$$

differenziale, lineare, del secondo ordine e alle differenze finite, nella funzione f dell'argomento reale t (tempo) e della variabile complessa $z=x+iy$. Questa funzione nella dipendenza da z (e per qualunque t) è olomorfa nella striscia della variabile complessa stessa compresa tra le rette $y=-h$ e $y=h$, e inoltre dev'essere reale sull'asse reale $y=0$. La costante g è positiva (valore dell'accelerazione di gravità). Viceversa, a ogni integrale della equazione precedente, che soddisfi alle condizioni specificate, corrisponde un moto ondoso dinamicamente possibile; da ciò deriva la denominazione di *caratteristica* attribuita all'equazione stessa.

Si tratta ora di saggiare un metodo per la sua integrazione. Per maggiore semplicità converrà assumere $h=1$, con che l'equazione in discorso diviene

$$\text{(I)}\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{f(t;z+i)+f(t;z-i)\right\}+ \\ +ig\frac{\partial}{\partial z}\left\{f(t;z+i)-f(t;z-i)\right\}=0.$$

Naturalmente la f va ora considerata nella striscia $-1\leq y\leq 1$.

2. Si immagini di applicare alla incognita funzione $f(t;z)$ lo sviluppo di Mac-Laurin in serie di potenze di t: si ha

$$\text{(1)}\qquad f(t;z)=\sum_0^\infty{}_n\frac{t^n}{n!}f_n(z),$$

avendo posto per brevità

$$f_0(z)=f(0;z)\quad,\quad f_n(z)=\left(\frac{\partial^n f}{\partial t^n}\right)_{t=0}\quad \text{per } n=1,2,3,\ldots.$$

[1] Cisotti, *Equazione caratteristica dei piccoli moti ondosi in un canale di qualunque profondità* [questi Rendiconti, vol. XXVII (1918), Nota I, pp. 255-259 e Nota II, pp. 312-316].

Dalla (1), mediante due successive derivazioni, si ottiene

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t\,;z) = \sum_2^\infty{}_n \frac{t^{n-2}}{(n-2)\,!} f_n(z) = \sum_0^\infty{}_n \frac{t^n}{n\,!} f_{n+2}(z)\,.$$

Per questa e per la (1) l'equazione caratteristica (I) può scriversi

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{t^n}{n\,!}\left\{ f_{n+2}(z+i) + f_{n+2}(z-i) + ig\frac{\partial}{\partial z}\Big[f_n(z+i) - f_n(z-i)\Big]\right\} = 0\,.$$

È questa soddisfatta per qualunque t, assumendo i coefficienti f_n dello sviluppo (1) in guisa da soddisfare alle seguenti relazioni:

$$f_{n+2}(z+i) + f_{n+2}(z-i) + ig\frac{\partial}{\partial z}\left[f_n(z+i) - f_n(z-i)\right] = 0\,,$$
$$(i = 0\,,1\,,2\,,3\,,\ldots.).$$

Sono queste equazioni lineari, alle sole differenze finite, che notoriamente determinano ([1]) le funzioni f_n per $n \geq 2$ quando sieno note f_0 e f_1.

3. Vediamo ora, in modo preciso, come si possono determinare le funzioni f_n mediante f_0 e f_1. Chiamo φ_n e ψ_n la parte reale e il coefficiente dell'unità immaginaria di f_n, con che

$$f_n(z) = \varphi_n(x\,,y) + i\psi_n(x\,,y)\,.$$

Dovendo essere f_n reale per $y=0$, si ha, riferendosi in particolare ai punti della retta $y=1$,

$$\varphi_n = \frac{1}{2}\left\{ f_n(x+i) + f_n(x-i)\right\} \quad,\quad \psi_n = \frac{1}{2i}\left\{ f_n(x+i) - f_n(x-i)\right\};$$

per cui le (2), riferite all'asse reale, cioè per $z = x$, divengono

$$\varphi_{n+2} - g\frac{\partial}{\partial x}\psi_n = 0\,,\quad \text{per}\quad y=1. \tag{3}$$

Ora è

$$\psi_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}\log \mathrm{Cth}^2\,\frac{\pi}{4}(x_1 - x)\,dx_1\,,$$

se si ammette che $\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}$ sia funzione dei punti della retta $y=1$, continua al finito e dotata di limite superiore finito anche al crescere indefinito dell'argomento ([2]).

([1]) Cfr. ad es. Pascal, *Lezioni di calcolo infinitesimale*. Parte III: *Calcolo delle variazioni e delle differenze finite* [Manuali Hoepli (1918), 2ª edizione, pag. 297].

([2]) Levi-Civita, *Trasformazione di una relazione funzionale dovuta al Dini* [questi Rendiconti, vol. XX (1911), pag. 293, formula (I) e pag. 381, ipotesi *a*)].

Per la precedente, la (3) può scriversi

(4) $$\varphi_{n+2} = \frac{g}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4} (x_1 - x)\, dx_1\,, \quad \text{per } y = 1.$$

Noti i valori che φ_n assume nei punti della retta $y = 1$, questa formula fornisce i valori che nei punti della stessa retta assume la parte reale della funzione f_{n+2}. Con ciò e per il fatto che f_{n+2} dev'essere reale per $y = 0$, la funzione stessa risulta definita nei punti interni della striscia $-1 \leq y \leq 1$ mediante la formula seguente [1]:

(5) $$f_{n+2}(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n+2} \frac{dx}{\mathrm{Ch}\, \frac{\pi}{2}(x - z)}\,.$$

4. Da quanto precede risulta che i coefficienti $f_n(z)$ dello sviluppo (1) della funzione $f(t\,;z)$ risultano determinati per mezzo delle formule (4) e (5) quando sieno assegnati i valori che φ_0 e φ_1 assumono nei punti della retta $y = 1$; precisamente le f_n con n pari dipendono in definitiva dai valori di φ_0 e le f_n con n dispari dai valori di φ_1. Converrà pertanto mettere in rilievo nello sviluppo (1) questa dipendenza separata, scrivendo

(1′) $$f(t\,;z) = \sum_0^\infty{}_n \frac{t^{2n}}{(2n)!} f_{2n}(z) + \sum_0^\infty{}_n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} f_{2n+1}(z)\,.$$

L'assegnazione dei valori di φ_0 e φ_1 nei punti della retta $y = 1$ dipende dalle circostanze iniziali del problema ondoso. Così ad esempio nel caso delle *onde di emersione* (impulsi iniziali nulli) è $\varphi_0 = 0$: in tali ipotesi è facile il riconoscere essere nulle tutte le f_n con n pari, percui nella (1′) scompare la prima serie e rimane

(1″) $$f(t\,;z) = \sum_0^\infty{}_n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} f_{2n+1}(z)\,,$$

nella quale i coefficienti f_{2n+1} dipendono in definitiva dai valori della sola φ_1 sopra $y = 1$; com'è noto, questi valori definiscono la conformazione iniziale del pelo libero. In una prossima Nota, trattando della forma delle onde di emersione, verrà messa in evidenza la equiconvergenza della serie sotto convenienti condizioni.

(1) Palatini, *Sulla influenza del fondo nella propagazione delle onde dovute a perturbazioni locali* [Rend. del Circ. mat. di Palermo, vol. XXXIX (1915), pag. 373, formula (12)].