ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Matematica. — *A propos de la notion de parallélisme dans une variété quelconque.* Nota di J. Pérès, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Étant donnée une variété à n dimensions V_n, dont l'élément linéaire est $\Sigma\, b_{ik}\, dx_i\, dx_k$, on connait les propriétés d'invariance de la forme

$$J = \Sigma (ij\,, kl)\, dx_i\, \delta x_j\, dx_k\, \delta x_l\,,$$

où interviennent les symboles à quatre indices de Riemann. M.r Levi-Civita obtient, dans son Mémoire *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque* ecc., une définition de J qui en met en évidence, sans calculs, le caractère invariant (1); il met en relief, dans la note critique qui termine ce Mémoire, une difficulté d'interprétation du passage où Riemann (2) a lui aussi en vue la caractérisation invariante de J. Je reviens ici sur l'interprétation du passage de Riemann.

2. Voici d'abord le fragment en question: « formetur expressio

$$R = \delta^2\, \Sigma\, b_{ik}\, dx_i\, dx_k - 2\, d\, \delta\, \Sigma\, b_{ik}\, dx_i\, \delta x_k + d^2\, \Sigma\, b_{ik}\, \delta x_i\, \delta x_k$$

determinatis variationibus secundi ordinis d^2, $d\delta$, δ^2 ita, ut sit

$$(1)\qquad \begin{cases} \delta'\, \Sigma\, b_{ik}\, dx_i\, \delta x_k - \delta\, \Sigma\, b_{ik}\, dx_i\, \delta' x_k - d\, \Sigma\, b_{ik}\, \delta x_i\, \delta' x_k = 0 \\ \delta'\, \Sigma\, b_{ik}\, dx_i\, dx_k - 2\, d\, \Sigma\, b_{ik}\, dx_i\, \delta' x_k = 0 \\ \delta'\, \Sigma\, b_{ik}\, \delta x_i\, \delta x_k - 2\, \delta\, \Sigma\, b_{ik}\, \delta x_i\, \delta' x_k = 0\,, \end{cases}$$

denotante δ' variationem quamcumque. Quo pacto haec expressio invenietur $= J$ ». Puis « ex hac formatione hujus expressionis sponte patet, mutatis variabilibus independentibus transmutari eam in expressionem a nova forma ipsius $\Sigma\, b_{ik}\, dx_i\, dx_k$ eadem lege dependentem ».

3. La détermination des différentielles secondes, à partir des équations (1), est immédiate: on trouve les expressions mêmes qu'introduit, grâce à la théorie du parallélisme, M.r Levi Civita. Mais si l'on adopte alors, pour les différentielles troisièmes, les valeurs qui en résultent (3), on trouve (4), non pas

$$R = J$$

(1) Rend. Circ. Palermo, t. 42, 1917, pp. 196-198. Cfr. pour une interprétation géométrique de J et de la contrevariance des $u^{(i)}$, ma Note (Rend. Lincei, 15 juin 1919).

(2) *Commentatio mathematica* ecc. (Ges. Werke, p. 380 et suiv.).

(3) Levi-Civita, loc. cit. (1), p. 196.

(4) Id., ibid., p. 202.

comme l'annonce Riemann, mais

$$R = 0$$

c'est la difficulté annoncée.

4. Nous vérifierons d'abord que le résultat de Riemann s'explique dans l'hypothèse, évidemment inadmissible du point de vue de la théorie du parallélisme, que les différentielles troisièmes sont indépendantes de l'ordre des différentiations [1].

Il est inutile de refaire le calcul, car en posant

$$R = R_1 + R_2$$

et en groupant dans R_2 les termes qui contiennent des différentielles troisièmes, on a

$$R_2 = 2\Sigma b_{ik}\, dx_i\, \delta^2 dx_k -$$
$$- 2\Sigma b_{ik}\, dx_i\, d\delta^2 x_k - 2\Sigma b_{ik}\, d\delta dx_i\, \delta x_k + 2\Sigma b_{ik}\, d^2\delta x_i\, \delta x_k$$

d'où, puisque

$$\delta dx_i = d\delta x_i\,,$$

$$R_2 = 2\Sigma b_{ik}\, dx_i (\delta d\delta x_i - d\delta\delta x_k)\,,$$

c'est-à-dire [2]

$$R_2 = 2\Sigma(ij\,,kl)\, dx_j\, \delta x_j\, dx_k\, \delta x_k\,;$$

d'où, puisque R est nul,

$$R_1 = -2\Sigma(ij\,,kl)\, dx_i\, \delta x_j\, dx_k\, \delta x_k\,.$$

Si l'on remarque que les symboles $(ij\,,kl)$ de Riemann diffèrent des symboles correspondants de M.r Levi-Civita, précisément par le facteur -2, on voit que, en adoptant les notations de Riemann, il vient

$$R_1 = J\,.$$

En faisant, sur les différentielles troisièmes, l'hypothèse indiquée au début de ce paragraphe, on trouve évidemment

$$R = R_1 = J$$

comme nous l'avions annoncé.

5. Le calcul précédent rattache, très simplement, le résultat de Riemann à celui de Mr. Levi-Civita. La différence provient de valeurs différentes attribuées aux différentielles troisièmes.

Le calcul de Riemann est d'ailleurs légitime: ce n'est pas par un hasard heureux que R, calculé comme nous l'indiquions, se trouve être un

[1] Cette remarque est aussi faite par Weber (2e édition des Oeuvres). Ni Riemann, ni Weber ne précisent d'ailleurs les valeurs à attribuer aux différentielles troisièmes.

[2] Levi-Civita, loc. cit., formules (33), (34), (34').

invariant. Cela provient au fond de ce que l'hypothèse du n. 4 est invariante par un changement de variable.

Il est d'ailleurs aisé de préciser les valeurs à attribuer aux différentielles troisièmes invariantes, conformément aux vues de Riemann (¹). Nous le verrons dans la suite, en employant d'abord un procédé indirect, mais qui m'a paru bien marquer l'égale légitimité des deux points de vue. Cela met d'ailleurs en évidence l'originalité des vues de M.r Levi-Civita et l'avantage de ses conceptions.

6. Revenons d'abord sur la définition de R. Soient donnés, en un point déterminé P de la variété considérée, un certain nombre d'éléments linéaires infiniment petits: dx correspondant aux accroissements des variables dx_1, dx_2, ... dx_n (nous nommerons ces accroissements coordonnées de l'élément par rapport aux variables x_i); δx ayant pour coordonnées $\delta x_1, \delta x_2, \dots \delta x_n$; etc. On pourra en déduire les symboles $d\delta$, $\delta d\delta$ etc., si l'on a défini, en un point quelconque M de la variété, les éléments linéaires qui seront considérés comme congruents respectivement à dx, δx, ...; il est essentiel que cette définition soit indépendante du système de référence (x_i) choisi dans V_n. Ceci fait, étant donné un invariant formé à l'aide des éléments dx, δx, ... (par exemple $\Sigma\, b_{ik}\, dx_i\, \delta x_k$), on pourra le différentier et en déduire, par différentiation, de nouveaux invariants: c'est ainsi qu'est formé R.

Pour définir, au point M, l'élément linéaire congruent à un élément donné, on peut d'abord utiliser la translation de M.r Levi-Civita (²). Comme une telle translation ne change ni les longueurs, ni les angles, il est bien clair qu'en adoptant la définition correspondante des différentielles successives, il vient

$$\delta^2 \Sigma\, b_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0 \qquad d\delta\, \Sigma\, b_{ik}\, dx_i\, \delta x_k = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$R = 0\,.$$

7. Mais on peut aussi procéder de la façon suivante, et cela revient au point de vue de Riemann.

Admettons que les coordonnées du point P soient $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, et soient $y_1, y_2, \dots y_n$ les variables géodésiques d'origine P et correspondantes à $x_1, x_2, \dots x_n$; on a

$$(2) \qquad x_i = y_i - \tfrac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\} y_\lambda\, y_\mu - \cdots \ (^3).$$

(¹) En abandonnant, naturellement, l'artifice bien inutile qu'est l'introduction des équations (1). Rappelons la définition des différentielles invariantes: leurs valeurs doivant être déterminées à partir des coefficients de la forme $\Sigma\, b_{ik}\, dx_i\, dx_k$, et telles qu'après changement de variables elles gardent même expression à partir des nouveaux coefficients.

(²) Il importe de fixer alors le chemin suivi de P à M.

(³) Les symboles de Christoffel sont calculés au point P par rapport à la forme $\Sigma\, b_{ik}\, dx_i\, dx_k$. Pour la définition des variables géodésiques, cf. Riemann, loc. cit., p. 261.

L'élément linéaire dx admet au point P, par rapport aux variables y_i, les coordonnées

$$dy_i = dx_i .$$

Nous définirons l'élément congruent au point M comme ayant, par rapport aux variables y_i, les mêmes coordonnées; on aura, en distinguant ces coordonnées per l'indice M,

$$(dy_i)_{\mathrm{M}} = dy_i = dx_i$$

et, en revenant aux variables x_i, les coordonnées de l'élément congruent seront

$$(dx_i)_{\mathrm{M}} = \Sigma_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} (dy_k)_{\mathrm{M}} = \Sigma \frac{\partial x_i}{\partial y_k} dx_k \text{ (}^1\text{)}.$$

La définition précédente de vecteurs congruents en P et en M est bien indépendante du choix des variables. Le calcul direct est aisé, mais c'est immédiat si l'on interprète les y_i comme coordonnées cartésiennes d'une variété euclidienne que l'on peut déduire de V_n de la façon suivante [2]: laissant fixe P et son voisinage du premier ordre, on applique les géodésiques issues de P sur leurs tangentes en P, avec conservation des arcs. Dans ces conditions les deux éléments congruents dx et $(dx)_{\mathrm{M}}$ auront pour images deux éléments égaux et parallèles de l'espace euclidien.

La définition précédente de la congruence entraîne immédiatement, en P,

$$(3) \quad \begin{cases} d\delta x_i = \sum_{kr} \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial y_k\, \partial y_r} dx_k\, \delta x_r , \\ \delta' d\delta x_i = \sum_{krs} \dfrac{\partial^3 x_i}{\partial y_k\, \partial y_r\, \partial y_s} dx_k\, \delta x_r\, \delta' x_s , \text{ etc. (}^3\text{)}, \end{cases}$$

valeurs évidemment invariantes et indépendantes de l'ordre des différentiations. On en déduira donc le résultat de Riemann

$$\mathrm{R} = \mathrm{J} .$$

8. Ajoutons ici une remarque. Étant donné au point P un vecteur contrevariant $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)}$, les résultats du n.° 7 permettent de lui faire correspondre (par congruence) un vecteur contrevariant $(\xi^{(1)})_{\mathrm{M}}, \ldots (\xi^{(n)})_{\mathrm{M}}$ d'origine M; on a les formules

$$(4) \qquad (\xi^{(i)})_{\mathrm{M}} = \Sigma_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \xi^{(k)} .$$

(1) Les dérivées partielles étant calculées au point M.

(2) Severi, Rend. Circ. mat. Palermo, t. 42, p. 253.

(3) Les seconds membres sont faciles à exprimer à l'aide des symboles de Christoffel. Les différentielles ainsi définies sont liées assez simplement à celles de M.r Levi-Civita. On vérifiera par exemple que la différentielle $\delta' d\delta x_i$, donnée par la formule (3), est la moyenne arithmétique des trois différentielles $\delta' d\delta x_i$, $d\delta\delta' x_i$, $\delta\delta' dx_i$ de M.r Levi-Civita.

Les propriétés de l'opération qui fait passer de $\xi^{(i)}$ à $(\xi^{(i)})_M$ sont à coup sûr moins simples que celles de la translation de Levi-Civita: les longueurs et les angles de vecteurs concourants ne sont pas conservés. Mais, au voisinage du point P, les deux opérations coïncident: si en effet les coordonnées de M sont $dx_1, \dots dx_n$, les relations (4) et (2) donnent immédiatement, pour les variations correspondantes des $\xi^{(i)}$, les valeurs

$$d\xi^{(i)} = - \Sigma \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\} dx_\lambda \, \xi^{(\mu)}.$$

Ce sont les formules de M.r Levi-Civita.

9. Si nous n'avions pas eu en vue de préciser la définition de R, nous pouvions parvenir plus vite aux formules (3). Il suffit de prendre les valeurs des différentielles invariantes à définir, nulles pour un système de variables géodésiques d'origine P. Elles seront alors nulles pour tout autre système y_i de variables géodésiques [1]; ce qui conduit immediatement aux formules (3) pour leurs valeurs en coordonnées quelconques. Il me semble que c'est la façon la plus simple d'obtenir les valeurs des différentielles invariantes $d\delta x$, dont on sait l'importance.

Matematica. — *Sur un théorème de Liapounoff.* Nota di A. Rosenblatt, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Envisageons un corps K limité par une surface S qui possède, en chaque point, une normale déterminée, dont les cosinus directeurs sont des fonctions continues du point. Envisageons l'intégrale

$$J = \frac{1}{2} \int \frac{dx\, dy\, dz\, dx'\, dy'\, dz'}{r} \tag{1}$$

étendue à tous les couples de points x, y, z ; x', y', z' du corps K, r étant la distance des deux points. D'après Liapounoff [2], parmi tous les corps K de même volume V la sfère possède le maximum absolu de l'intégrale (1). Il n'y a pas d'ailleurs d'autre maximum relatif.

Liapounoff se sert, pour parvenir à ce résultat, des méthodes de la théorie du potentiel newtonien en envisageant une certaine couche électrique sur le surface S du corps. Il suppose établi le théorème, d'après lequel, parmi tous les corps de même volume V, c'est la sfère dont la surface possède la plus petite aire. On sait que ce théorème n'a été démontré que récemment

[1] Parceque la relation entre deux systèmes de variables géodésiques d'origine P est à coefficients constants.

[2] Cfr. Poincaré, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*. Paris, 1902.