ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Les propriétés de l'opération qui fait passer de $\xi^{(i)}$ à $(\xi^{(i)})_M$ sont à coup sûr moins simples que celles de la translation de Levi-Civita: les longueurs et les angles de vecteurs concourants ne sont pas conservés. Mais, au voisinage du point P, les deux opérations coïncident: si en effet les coordonnées de M sont $dx_1, \dots dx_n$, les relations (4) et (2) donnent immédiatement, pour les variations correspondantes des $\xi^{(i)}$, les valeurs

$$d\xi^{(i)} = -\Sigma \left\{ {\lambda\mu \atop i} \right\} dx_\lambda \, \xi^{(\mu)}.$$

Ce sont les formules de M.r Levi-Civita.

9. Si nous n'avions pas eu en vue de préciser la définition de R, nous pouvions parvenir plus vite aux formules (3). Il suffit de prendre les valeurs des différentielles invariantes à définir, nulles pour un système de variables géodésiques d'origine P. Elles seront alors nulles pour tout autre système y_i de variables géodésiques [1]; ce qui conduit immediatement aux formules (3) pour leurs valeurs en coordonnées quelconques. Il me semble que c'est la façon la plus simple d'obtenir les valeurs des différentielles invariantes $d\delta x$, dont on sait l'importance.

Matematica. — *Sur un théorème de Liapounoff*. Nota di A. Rosenblatt, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Envisageons un corps K limité par une surface S qui possède, en chaque point, une normale déterminée, dont les cosinus directeurs sont des fonctions continues du point. Envisageons l'intégrale

$$\text{(1)} \qquad J = \frac{1}{2} \int \frac{dx\, dy\, dz\, dx'\, dy'\, dz'}{r}$$

étendue à tous les couples de points $x, y, z; x', y', z'$ du corps K, r étant la distance des deux points. D'après Liapounoff [2], parmi tous les corps K de même volume V la sfère possède le maximum absolu de l'intégrale (1). Il n'y a pas d'ailleurs d'autre maximum relatif.

Liapounoff se sert, pour parvenir à ce résultat, des méthodes de la théorie du potentiel newtonien en envisageant une certaine couche électrique sur le surface S du corps. Il suppose établi le théorème, d'après lequel, parmi tous les corps de même volume V, c'est la sfère dont la surface possède la plus petite aire. On sait que ce théorème n'a été démontré que récemment

(1) Parceque la relation entre deux systèmes de variables géodésiques d'origine P est à coefficients constants.

(2) Cfr. Poincaré, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*. Paris, 1902.

d'une manière satisfaisante au point de vue de la rigueur et dans des suppositions assez générales (¹).

Nous avons démontré le théorème de Liapounoff concernant le maximum absolu de la sfère pour des corps tout à fait généraux, sans faire appel à des considérations étrangères au théorème et sans introduire des grandeurs étrangères au théorème, comme l'aire de la surface du corps.

2. Nous envisageons dans l'espace R_3 un ensemble borné E mesurable au sens de M. Lebesgue. À cet ensemble correspond, dans l'espace à six dimensions $x, y, z : x', y', z'$ un ensemble mesurable E^{**}, dans lequel la fonction $\frac{1}{r}$ est sommable. On peut définir le potentiel newtonien de l'ensemble E comme l'intégrale (1) étendue à E^{**}; et son énergie potentielle, comme le négatif de cette intégrale.

Formons une suite de divisions $D_1, D_2, \ldots$ de l'espace R_3 en cubes $K_i^1, K_i^2, \ldots$ de côtés $\frac{1}{1^1}, \frac{1}{2^2}, \ldots$. Envisageons les sommes

$$\sum\nolimits_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j,i \neq j} \frac{m(e_i^k)\, m(e_j^k)}{r_{i,j}^k}, \tag{2}$$

$m(e_i^k)$ étant la mesure de points de E contenus dans le i^{me} cube de la k^{me} subdivision D_k; r_{ij}^k est la distance des milieux du i^{me} et du j^{me} cube et la sommation est étendue à tous les couples de valeurs i, j tels que $i \neq j$.

Remplaçons les ensembles de points de E contenus dans les cubes K_i^k par des parallélopipèdes $\overline{K}_i^k$ concentriques aux cubes K_i^k, de même base et parallèle à celle de K_i^k et de volume égal à $m(e_i^k)$. Les sommes

$$\overline{\sum}_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j\; i \neq j} \int\!\!\int \frac{dx\, dy\, dz\, dx'\, dy'\, dz'}{r_{ij}^k}, \tag{3}$$

r_{ij}^k désignant maintenant la distance de deux points variables P et Q des parallélopipèdes $\overline{K}_i^k, \overline{K}_j^k$, tendent vers la même limite que les sommes (2), et cette limite est égale à la valeur J de l'intégrale (1).

D'après un théorème connu de M. Fubini (²), l'intégrale (1) est égale à l'intégrale

$$J = \frac{1}{2} \int\!\!\int_{R - e_0} dx\, dy\, dx'\, dy'\, J^*(x, y\, ;\, x', y'), \tag{4}$$

dans laquelle l'intégrale

$$J^*(x, y\, ;\, x', y') = \int\!\!\int \frac{dz\, dz'}{r}. \tag{5}$$

(¹) L. Tonelli, *Sulla proprietà di minimo della sfera.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXIX, 1915.

(²) *Sugli integrali multipli.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1907.

est étendue aux deux ensembles linéaires de points E^* et $E^{*\prime}$ situés sur les deux droites $z(x, y)$ et $z'(x', y')$ et appartenant à l'ensemble E; x, y et x', y' sont les coordonnées des points où les droites z, z' percent le plan x, y. Les ensembles $E^*, E^{*\prime}$ sont *mesurables*, à un ensemble e_0 de points x, y de mesure nulle près. R est un rectangle suffisamment grand et r la distance de deux points des droites z et z'.

Appellons $\overline{K}$ le corps symmétrique par rapport au plan des x, y que l'on obtient en remplaçant, sur chaque droite, z à un ensemble de mesure nulle près, l'ensemble E^* par un segment de longueur égale à $m(E^*)$ et de milieu situé sur le plan x, y.

On peut alors établir le

Théorème I: Le potentiel $\overline{J}$ du corps $\overline{K}$ *n'est pas plus petit* que le potentiel J de E. Il n'est égal au potentiel J que dans le cas, où l'ensemble E^*, situé sur la droite z, est déjà un segment S de milieu situé dans le plan x, y, à un ensemble linéaire de mesure nulle près, et à l'exception d'un ensemble de droites z qui donnent sur le plan x, y un ensemble de mesure nulle. Cela veut dire que l'on peut ajouter à E^* un ensemble E_0^* de mesure nulle et soustraire de E^* un autre ensemble de mesure nulle. $E_0'^*$. Sur un ensemble de droites de mesure nulle, E^* peut ou bien ne pas être mesurable ou, en étant mesurable, ne pas être un segment S de centre situé sur le plan x, y, à un ensemble linéaire de mesure nulle près. Dans tous les autres cas on a l'*inégalité*

$$\overline{J} > J \tag{6}$$

3. Introduisons maintenant les définitions suivantes :

sfère S *à un ensemble de mesure nulle près* est un ensemble E des points d'une sfère à laquelle on a ajouté un ensemble E_0 de points de mesure nulle et de laquelle on a soustrait un autre ensemble E_0' de points de mesure nulle;

corps plein parfaitement symmétrique à un ensemble de mesure nulle près est un ensemble E borné qui possède les propriétés suivantes: Si l'on envisage un plan π arbitraire de l'espace, il existe un plan (unique) de symmétrie du corps π' paralléle à π. Ce plan π' possède par rapport au corps les propriétés du plan x, y par rapport à l'ensemble E du n. 2. Appellons un tel corps un *corps parfait.*

Le théorème I peut alors s'énoncer ainsi :

Théorème I': Étant donné un corps K qui n'est pas un corps parfait à un ensemble de mesure nulle près, il existe un autre corps $\overline{K}$ dont le potentiel $\overline{J}$ est *plus grand* que celui du corps K.

On démontre ensuite sans difficulté le

Théorème II: Tout corps parfait à un ensemble de mesure nulle près est une certaine sfère à un ensemble de mesure nulle près.

Bien plus de difficultés présente la démonstration du

Théorème III: Le potentiel d'une sfère S de volume V *n'est pas plus petit* que le potentiel de tout ensemble E borné et mesurable de mesure $m(E) = V$.

D'après ce qui a été dit au n. 2, il suffit de démontrer le théorème III pour tous les corps K composés d'un nombre fini de polyèdres, que l'on peut supposer être des cubes. On symmétrise, pour parvenir à ce but, le corps K alternativement par rapport à deux plans passant par un axe l contenant un angle α incommensurable avec π. On obtient un corps de révolution R de même volume que le corps K, mais d'un potentiel plus grand. En symmétrisant ensuite ce corps par rapport à un second axe l' perpendiculaire à l'axe l et rencontrant cet axe (Tonelli, loc. cit.), on obtient une suite $R_1, R_2, \ldots$ de corps de révolution qui converge vers une sfère S déterminée. Cette sfère possède un potentiel *au moins* égal à celui de tout ensemble E.

Des théorèmes I', II, III résulte le théorème de Liapounoff:

Théorème IV: La sfère S à mesure nulle près de volume V possède un potentiel *plus grand* que celui de tout autre ensemble E de mesure $m(E) = V$ et borné.

Les considérations, qui conduisent à ce but, peuvent être employées pour établir un théorème analogue concernant les corps *non homogènes*, c'est à dire des ensembles E de densité $\varrho(P)$ fonction du point P de l'ensemble.

Matematica. — *Nuovo metodo di sommazione delle serie che ammette l'algoritmo delle serie assolutamente convergenti*. Nota di Gustavo Sannia, presentata dal Socio Enrico D'Ovidio.

1. In una Memoria [1], sintetizzata in una Nota di questi Rendiconti [2], trasformai il *metodo esponenziale* nel *metodo di Borel generalizzato* (o Bg) col duplice scopo, che credei raggiunto, di accrescerne la potenza e di far sì che alle serie sommabili fossero applicabili *incondizionatamente* quelle operazioni aritmetiche che erano applicabili solo ad una classe particolarissima di serie: le *assolutamente sommabili* del Borel. Ma in una recente Nota [3] ho riconosciuto che in realtà il secondo scopo avevo raggiunto solo in parte, nel senso che anche col nuovo metodo Bg l'applicabilità dell'ordinaria re-

[1] Rend. del Circ. mat. di Palermo, t. XLII, 1917, pag. 303.
[2] Vol. XXVI, serie 5ª, 1° sem., fasc. 11, pag. 603. La indicherò in seguito con N.
[3] In corso di pubblicazione nei Rend. del Circ. mat. di Palermo.