ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Bien plus de difficultés présente la démonstration du

Théorème III: Le potentiel d'une sfère S de volume V *n'est pas plus petit* que le potentiel de tout ensemble E borné et mesurable de mesure $m(\mathrm{E}) = \mathrm{V}$.

D'après ce qui a été dit au n. 2, il suffit de démontrer le théorème III pour tous les corps K composés d'un nombre fini de polyèdres, que l'on peut supposer être des cubes. On symmétrise, pour parvenir à ce but, le corps K alternativement par rapport à deux plans passant par un axe l contenant un angle α incommensurable avec π. On obtient un corps de révolution R de même volume que le corps K, mais d'un potentiel plus grand. En symmétrisant ensuite ce corps par rapport à un second axe l' perpendiculaire à l'axe l et rencontrant cet axe (Tonelli, loc. cit.), on obtient une suite $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots$ de corps de révolution qui converge vers une sfère S déterminée. Cette sfère possède un potentiel *au moins* égal à celui de tout ensemble E.

Des théorèmes I', II, III résulte le théorème de Liapounoff:

Théorème IV: La sfère S à mesure nulle près de volume V possède un potentiel *plus grand* que celui de tout autre ensemble E de mesure $m(\mathrm{E}) = \mathrm{V}$ et borné.

Les considérations, qui conduisent à ce but, peuvent être employées pour établir un théorème analogue concernant les corps *non homogènes*, c'est à dire des ensembles E de densitè $\varrho(\mathrm{P})$ fonction du point P de l'ensemble.

Matematica. — *Nuovo metodo di sommazione delle serie che ammette l'algoritmo delle serie assolutamente convergenti.* Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

1. In una Memoria (¹), sintetizzata in una Nota di questi Rendiconti (²), trasformai il *metodo esponenziale* nel *metodo di Borel generalizzato* (o Bg) col duplice scopo, che credei raggiunto, di accrescerne la potenza e di far sì che alle serie sommabili fossero applicabili *incondizionatamente* quelle operazioni aritmetiche che erano applicabili solo ad una classe particolarissima di serie: le *assolutamente sommabili* del Borel. Ma in una recente Nota (³) ho riconosciuto che in realtà il secondo scopo avevo raggiunto solo in parte, nel senso che anche col nuovo metodo Bg l'applicabilità dell'ordinaria re-

(¹) Rend. del Circ. mat. di Palermo, t. XLII, 1917, pag. 303.

(²) Vol. XXVI, serie 5ª, 1° sem., fasc. 11, pag. 603. La indicherò in seguito con N.

(³) In corso di pubblicazione nei Rend. del Circ. mat. di Palermo.

gola per la moltiplicazione delle serie rimane condizionata (come dirò al n. 3) ([4]).

In questa Nota mi propongo di riguadagnare ad usura il perduto, trasformando ancora il metodo esponenziale in un nuovo metodo *più potente del metodo* Bg, ed anche di quelli di Cesàro e di Eulero, e nel quale valgono *incondizionatamente tutte* le operazioni lecite sulle serie *assolutamente* convergenti ([5]).

A tale scopo conviene richiamare alcuni risultati.

2. Una serie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{1}$$

è (N, n. 1) *sommabile* (B, r) quando la serie

$$u^{(r)}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r} \frac{\alpha^n}{n!} \qquad (u_{n+r} = 0 \text{ se } n + r < 0) \tag{2}$$

è una trascendente intera e l'integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha} u^{(r)}(\alpha)\, d\alpha \qquad (\alpha \geq 0) \tag{3}$$

è convergente; allora la (1) ha per *somma u* questo integrale, aumentato di $u_0 + u_1 + \cdots + u_{r-1}$ se $r > 0$.

La (1) è *sommabile* Bg se (N, n. 2) è sommabile con qualcuno dei metodi così definiti:

$$\ldots\ldots (B, -2), (B, -1), (B, 0), (B, 1), (B, 2), \ldots\ldots \tag{4}$$

3. Nella Nota cit. in ([4]), ho chiamato *assolutamente sommabile* (B, r) la (1) quando la convergenza di (3) è assoluta, ed ho dimostrato che *tutti* i teoremi enunciati nel n. 3 di N, *incluso il teorema* V relativo alla moltiplicazione ([6]), sussistono se in essi si premette la parola « *assolutamente* » alla parola « *sommabile* ».

Se si chiama *assolutamente sommabile* Bg una serie quando è assolutamente sommabile con qualcuno dei metodi (4) ([7]), si possono riassumere

([4]) In seguito a ciò vanno apportate a N alcune correzioni. Va soppresso il teor. V e la nota ([2]) di pag. 605, e la parola « assolutamente » nella linea 16 di pag. 604 e nelle linee 4 e 6 di pag. 606; poi nell'enunciato del teor. III va cambiato $r \geq s$ in $r \leq s$, e in quello del coroll. 2° va cambiato n in $-n$. La parola « assolutamente » va anche soppressa dalla linea 7 della pag. 77 di un'altra Nota di questi Rendiconti (vol. XXVI, serie 5ª, 2° sem., fasc. 4°, pag. 77).

([5]) Inclusa la moltiplicazione. (È solo vietato di alterare l'ordine dei termini al di là di qualunque posto).

([6]) Da sopprimersi, giusta la nota ([4]).

([7]) Sono dunque particolari serie sommabili Bg; ma più generali delle assolutamente sommabili con tutti i metodi (4), considerato dal Borel.

i nuovi teoremi che così si ottengono, dicendo che *alle serie assolutamente sommabili* Bg *sono applicabili incondizionatamente tutte le operazioni lecite sulle serie assolutamente convergenti* (8).

Poichè, per esempio, allora segue dal teor. V (modificato) che:

A) *Se due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots , \quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{5}$$

sono assolutamente sommabili Bg *ed hanno per somma u e v rispettivamente, anche la serie prodotto*

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots \quad (w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0) \tag{6}$$

è assolutamente sommabile Bg *ed ha per somma* $w = uv$.

4. Occorre anche richiamare qualche proprietà della serie di potenze

$$u + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n + \cdots \tag{7}$$

considerata solo per i valori reali e non negativi di x.

B) *L'insieme dei valori (reali, non negativi) di* x, *per i quali la* (7) *è sommabile* Bg, *è un intervallo* $(0, g)$, *dal quale va forse escluso l'estremo* g (9).

Per ciascun x' di tali valori di x, la (7) sarà dunque sommabile (B, r) per qualche valore di r, e perciò (10) sarà assolutamente sommabile $(\mathrm{B}, r-1)$ per tutti i valori x dell'intervallo $(0, x')$, tranne forse per $x = x'$. Ora, poichè ciò vale per ogni x' di $(0, g)$, *vicino a g quanto si vuole*, si conclude che:

C) *Per tutti i valori* x *di* $(0, g)$, *tranne forse per* $x = g$, *la* (7) *è assolutamente sommabile* Bg.

La somma $u(x)$ della (7), interpretata col metodo Bg, è dunque una funzione di x definita in $(0, g)$, tranne forse nell'estremo g. Essa gode di varie proprietà, fra le quali rilevo la seguente (11):

D) *La funzione* $u(x)$ *è continua in* $(0, g)$, *incluso* g *se ivi esiste, cioè se ivi la* (7) *è sommabile* Bg.

5. Tutto ciò premesso, passo a definire il nuovo metodo di sommazione annunziato nel n. 1, che indicherò con EBg, essendo una composizione del metodo Bg e di quello di Eulero.

(8) Cfr. (5).

(9) Ciò segue dal n. 15 di una mia Nota degli Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LIII, 1917, pag. 192.

(10) Per un teorema del n. 3 di una mia Nota di questi Rendiconti, vol. XXVII, serie 5a, 1° sem., fasc. 2°, pag. 98.

(11) Cfr. il n. 8 di una mia Nota degli Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino (vol. LIX, 1918, pag. 171).

Dirò che una serie (1) *è sommabile* EBg quando la corrispondente serie di potenze (7) è sommabile Bg per $0 \leq x < 1$, ed inoltre esiste ed è finito il

$$\lim_{x=1-0} u(x) = u, \tag{8}$$

che allora chiamerò *somma* della serie (1).

Dai risultati del n. 3 e dai teoremi A e C, si deduce facilmente che

Alle serie sommabili EBg *sono applicabili incondizionatamente tutte le operazioni* ([12]) *lecite sulle serie assolutamente convergenti* ([13]).

Si ha per esempio: *se due serie* (5) *sono sommabili* EBg *ed hanno per somma u e v rispettivamente, anche la serie prodotto* (6) *è sommabile* EBg *ed ha per somma uv*.

Infatti, giusta l'ipotesi, le serie (7) e

$$v(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \cdots$$

sono sommabili Bg per $0 \leq x < 1$, anzi lo sono assolutamente (per il teorema C); quindi (per il teorema A) si può asserire che la loro serie-prodotto formata con la legge (6), ossia

$$w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \cdots,$$

è pure (assolutamente) sommabile Bg per $0 \leq x < 1$ ed ha per somma $w(x) = u(x)\, v(x)$. Ma dall'ipotesi si ha inoltre

$$\lim_{x=1-0} u(x) = u \quad , \quad \lim_{x=1-0} v(x) = v;$$

quindi è

$$\lim_{x=1-0} w(x) = uv.$$

Tutto ciò prova che la (6) è sommabile EBg ed ha per somma uv.

6. Per giustificare pienamente quanto ho asserito in fine del n. 1, resta da dimostrare che *il metodo* EBg *è più potente del metodo* Bg *e dei metodi di Cesàro e di Eulero*.

Ciò equivale a dire che *se una serie* (1) *è sommabile* Bg *o col metodo di Cesàro o con quello di Eulero ed ha per somma u, è pure sommabile* EBg *ed ha ugual somma* (*ma non viceversa*).

Poichè il metodo di Cesàro è meno potente di quello di Eulero ([14]), basterà considerare quest'ultimo e Bg.

([12]) Cfr. ([5]).

([13]) Di questa importante proprietà già godevano il metodo di Cesàro (come era noto) e quello di Eulero (come ho dimostrato in una Nota di questi Rendiconti, t. XXVIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 12, pag. 397).

([14]) Cfr. la fine della Nota cit. in ([13]).

Se la (1) è sommabile con somma u col metodo di Eulero, vuol dire [15] che, per $0 \leq x < 1$, la (7) è convergente, quindi è sommabile Bg (N, n. 2), e che la sua somma $u(x)$ soddisfa la (8); e ciò prova che la (1) è anche sommabile EBg con somma u.

Dire che la (1) è sommabile Bg ed ha per somma u, è come dire che la (7) per $x = 1$ è sommabile Bg con somma u, e quindi (per il teor. B) è sommabile Bg per $0 \leq x \leq 1$. Ora la sua somma $u(x)$, che per $x = 1$ vale u, è funzione continua in questo intervallo, estremo 1 incluso (per il teor. D); quindi sussiste la (8). Ciò prova che la (1) è anche sommabile EBg con somma u.

Resta da dimostrare che una serie sommabile EBg non sempre è anche sommabile Bg o col metodo di Eulero. A tale scopo basta dare un esempio.

La serie di potenze (7) corrispondente alla serie numerica

$$1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^n + \cdots \tag{9}$$

è

$$1 + (1+i)\,x + (1+i)^2\,x^2 + \cdots + (1+i)^n\,x^n + \cdots \tag{10}$$

e non è convergente per $0 \leq x < 1$ (ma solo per $0 \leq x < 1 : \sqrt{2}$); e ciò basta per concludere che la (9) non è sommabile col metodo di Eulero.

Poi la serie (2) corrispondente alla (10),

$$u^{(r)}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^{n+r}\, x^{n+r} \frac{\alpha^n}{n\,!} = (1+i)^r\, x^r\, e^{(1+i)x\alpha} \text{ [16]},$$

è trascendente intera in α per ogni x, e il corrispondente integrale (3) è

$$(1+i)^r\, x^r \int_0^{\infty} e^{(1+r)x\alpha - \alpha}\, d\alpha \quad (\alpha \geq 0). \tag{11}$$

Per $x = 1$ esso si riduce (a parte il fattore esterno) a $\int_0^{\infty} e^{i\alpha}\, d\alpha$, che è divergente; dunque la (10) per $x = 1$, ossia la (9), non è sommabile Bg.

Invece, per $0 \leq x < 1$ l'integrale (11) è convergente; anzi lo è assolutamente, perchè, sostituendo all'integrando il suo modulo $e^{x\alpha - \alpha}$, si ha un integrale convergente per tali valori di x. Dunque la (10) è sommabile (B, r) (per ogni r): quindi è sommabile Bg per $0 \leq x < 1$. La sua somma

[15] Per definizione. Cfr. la Nota cit. in [13].

[16] Escludendo il valore $x = 0$, se $r < 0$.

(che non dipende da r) è espressa (n. 2) dall'integrale (11) per $r = 0$, ed è perciò

$$u(x) = \int_0^{\infty} e^{(1+i)x\alpha - \alpha}\, dx = \frac{1}{1-(1+i)\,x}\,.$$

Si ha poi

$$\lim_{x=1-0} u(x) = -i\,;$$

dunque *la* (9) *è sommabile* EBg (*ed ha per somma* $-i$), *ma non lo è coi metodi di Eulero e* Bg.

Chimica vegetale. — *Sulle sostanze tanniche del « morus alba »* [1]. Nota del dott. Carlo Ghirlanda, presentata dal Corrisp. D. Lo Monaco.

In una Nota pubblicata or sono due anni, il prof. Pigorini si interessava della ricerca dei tannini negli organi del gelso, come quella che avrebbe fatto notevolmente progredire nelle conoscenze fisiologiche di questa pianta ancora così mal conosciuta nelle sue funzioni [2].

L'A. prese allora in esame gli organi legnosi del gelso e precisamente i rami (legno e corteccia), ma non potè giungere ad una conclusione precisa sulla presenza e tanto meno sulla quantità dei tannini per i risultati incertissimi che l'esperienza gli dette. Vedremo in questa Nota la spiegazione del fatto. Io ho ripreso lo studio della questione, facendo oggetto delle mie ricerche unicamente questo gruppo di sostanze e al riguardo la sua eventuale presenza e ripartizione nei diversi organi.

Non starò a dilungarmi in superflue considerazioni sul valore della ricerca, ritenendo come, in un argomento ancora così mal noto sotto i punti di vista chimico e fisiologico, ogni nuova conoscenza, anche piccola, rappresenti un contributo apprezzabile per raccogliere quella massa di materiali che dovranno o prima o poi servire a chiarire interessanti fenomeni. Passo quindi senz'altro alla esposizione dei fatti.

Il metodo da me scelto e seguìto per l'analisi è quello Löwenthal e Schröder; i materiali sono stati: le foglie, la corteccia dei rami, il legno dei rami, la corteccia della radice, il legno della radice.

Il materiale fresco, côlto nel gelseto annesso all'istituto, veniva immediatamente, dopo grossolano tagliuzzamento, immerso in acqua bollente in

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio della R. stazione bacologica sperimentale di Padova.

(2) L. Pigorini, *Prime ricerche sulla composizione chimica degli organi legnosi del gelso*. Atti R. ist. ven. sc. lett., LXXVI, parte 2ª, 1917, e Archiv. di farmacologia e sc. affini, an. XVI, vol. XXIII, anno 1917.