# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXIX.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Matematica. — *Sulla rappresentazione analitica di una falda di una superficie mediante serie procedenti per le potenze fratte di due variabili.* Nota del dott OSCAR CHISINI, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES.

1. In una precedente Nota, intitolata *Sugli incroci delle curve di diramazione di una funzione algebrica di due variabili* [1], ho dimostrato che le due sostituzioni A e B, relative a due parti $a$ e $b$ della curva di diramazione per una funzione algebrica $z(xy)$ nell'intorno di un punto $P_0 = (x_0\, y_0)$, sono fra loro permutabili quando le $a$ e $b$ passino per $P_0$ semplicemente e senza contatto, A e B generando un gruppo abeliano G.

In questa Nota mi propongo di esaminare più precisamente la struttura di tale gruppo, e dedurne la rappresentazione analitica, mediante serie, della funzione algebrica $z(xy)$.

E conviene esplicitamente osservare che, potendosi supporre gli assi orientati in modo generico, l'incrocio delle due curve di diramazione corrisponderà a un incrocio di due curve multiple della superficie, origine di falde superlineari, o a un punto di una curva multipla che sia base per il sistema delle curve staccate su essa dalle sue superficie polari.

2. Il gruppo generato dalle due sostituzioni A e B potrà, in generale, non essere transitivo: si ha per esempio questo caso quando il punto $P_0$ corrisponda ad una bitangente (propria od impropria) della superficie $f(xy) = 0$ parallela all'asse $z$; le due sostituzioni A e B vengono allora a corrispondere a due falde distinte della superficie, ed operano su due coppie distinte di valori di $z$

$$A = (z_1\, z_2)\ ,\ B = (z_3\, z_4)\,.$$

Dunque, se il gruppo G generato dalle sostituzioni A e B non è transitivo, potremo distinguere tante falde della superficie [per il punto $(xy)$ variabile nell'intorno di $P_0$] quanti sono i sistemi di transitività in cui si possono dividere le $n$ determinazioni di $z$: *le due sostituzioni* A *e* B *saranno permutabili anche quando si considerino operare su un solo sistema di transitività.*

Si consideri ora una falda della superficie $f(xyz) = 0$, la quale abbia per origine il punto P di coordinate $(0\,0\,0)$; la falda sia di un certo ordine $r > 1$, e la funzione algebrica $z$, da essa definita nell'intorno del punto

[1] Questi Rendiconti, vol. XXIX, 1° sem., pag. 127.

$P_0 = (x = 0, y = 0)$, abbia una curva di diramazione la quale passi precisamente per il punto $P_0$ con due parti o rami lineari $a$ e $b$ a tangenti distinte. Le due sostituzioni A e B, relative ad $a$ e $b$, saranno ora considerate operare solamente sulle $r$ determinazioni di $z$, relative alla nostra falda, e il loro gruppo G risulterà transitivo.

Ci proponiamo qui di *esaminare quale possa essere il gruppo abeliano* G *generato dalle due sostituzioni permutabili* A *e* B; faremo vedere come esso sia univocamente determinato dai periodi $\mu$ e $\nu$ delle sostituzioni A e B, e dal numero $r$ delle lettere su cui esse operano.

La sostituzione A si comporrà, in generale, di più cicli

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_\alpha,$$

e potremo scrivere

$$A = A_1 A_2 A_3 \ldots A_\alpha .$$

Siccome A è invariante nel gruppo transitivo G, essa opererà su tutte le $r$ lettere, e i varî cicli $A_1 A_2 \ldots A_\alpha$ conterranno un medesimo numero $\mu$ di elementi: avremo dunque $r = \alpha\mu$, e, distinguendo le $r$ determinazioni di $z$ con due indici, potremo scrivere

$$A = (z_{11}\, z_{12} \ldots z_{1\mu})\,(z_{21}\, z_{22} \ldots z_{2\mu}) \ldots (z_{\alpha 1}\, z_{\alpha 2} \ldots z_{\alpha\mu}),$$

essendo

$$A_1 = (z_{11}\, z_{12} \ldots z_{1\mu})$$
$$A_2 = (z_{21}\, z_{22} \ldots z_{2\mu})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_\alpha = (z_{\alpha 1}\, z_{\alpha 2} \ldots z_{\alpha\mu}) .$$

La sostituzione B deve lasciare invariata la A, ma non i singoli cicli, altrimenti G non sarebbe transitivo, e potremo supporre che essa porti $A_1$ in $A_2$, $A_2$ in $A_3 \ldots A_\alpha$ in $A_1$: avremo così che $B^\alpha$ lascia fermi i cicli di A; ove $B^\alpha$ porti $z_{11}$ in $z_{1m+1}$, sarà

$$B^\alpha = A^m,$$

perchè l'operazione $A^{-m} B^\alpha$, lasciando fermo $z_{11}$ ed essendo invariante nel gruppo transitivo G, deve lasciar ferme tutte le $r$ determinazioni di $z$.

Essendo $\nu$ il periodo di B, sarà $h = \dfrac{\nu}{\alpha}$ il periodo di $B^\alpha$, e quindi anche di $A^m$; il prodotto $hm$ appare così il minimo multiplo comune di $m$ e di $\mu$, onde, indicando con $\delta$ il massimo comun divisore di $m$ e $\mu$, si ha

$$hm = \frac{m\mu}{\delta}\ , \quad \delta = \frac{\mu}{h} .$$

Posto ora

$$k = \frac{m}{\delta},$$

$k$ risulta primo con $\mu$ e quindi $A^k$ genera tutto il gruppo ciclico generato dalla operazione A; essendo poi

$$m = k \frac{\mu}{h},$$

si ha

$$B^\alpha = (A^k)^{\frac{\mu}{h}}.$$

Ponendo $z'_{i1} = z_{i1}$, $z'_{i2} = z_{i,k+1}$, $z'_{i3} = z_{i,2k+1} \ldots$ $(i = 1, 2 \ldots \alpha)$ e indicando con $A'$ la potenza $k$-esima di A, potremo scrivere

$$\begin{aligned} A' = A^k &= (z'_{11}\, z'_{12} \ldots z'_{1\mu})\, (z'_{21}\, z'_{22} \ldots z'_{2\mu}) \ldots (z'_{\alpha 1}\, z'_{\alpha 2} \ldots z'_{\alpha\mu}) \\ B^\alpha &= A'^{\delta} \\ B &= (z'_{1i}\, z'_{2i} \ldots z'_{\alpha i}\, z'_{1.\delta+i}\, z'_{2.\delta+i} \ldots z'_{\alpha, h\delta-\delta+i}) \\ A &= A'^{p} \end{aligned}$$

dove $p$ è un numero primo con $\mu$.

Essendo

$$r = \frac{\mu\nu}{h}, \quad \delta = \frac{\mu}{h}, \quad k = \frac{m}{\delta}, \quad kp \equiv 1 \pmod{\mu},$$

si ha che *il gruppo* G *è determinato dai tre valori di* $\mu, \nu, h$, e le operazioni A e B risultano in esso fissate ove si dia anche il numero $m$ (potenza di A, cui è uguale $B^\alpha$), il quale è definito, a meno di un fattore primo con $\mu$, dalla circostanza che $\frac{\mu}{h}$ è il massimo comun divisore di $\mu$ ed $m$.

Se $h = 1$, risulta $\alpha = \nu$, A e B riescono indipendenti ed è

$$B = (z'_{1i}\, z'_{2i} \ldots z'_{\nu i})$$

essendo $\delta \equiv 0 \pmod{\mu}$.

3. Ciò posto, vediamo come si ottenga la *rappresentazione analitica della falda*, supponendo dapprima, per semplicità, che le due curve di diramazione $a$ e $b$ siano rispettivamente gli assi $x = 0$ e $y = 0$. Poniamo

$$x = u^\mu, \quad y = v^\nu;$$

allora la $z$ appare funzione uniforme del punto $(u, v)$ e quindi [1] si potrà sviluppare per le potenze di $u$ e $v$

$$z = \Sigma\Sigma\, a_{ik}\, u^i\, v^k. \tag{1}$$

[1] Cfr. p. es. Picard, *Traité d'analyse*, Paris, 1893, tom. II, pag. 237.

Ma la funzione $z$, così scritta, appare una funzione del punto $(xy)$ a $\nu\mu$ determinazioni, mentre la falda è di un ordine $r = \frac{\nu\mu}{h}$, sicchè, ove sia $h > 1$, occorre che i coefficienti $a_{ik}$ assumano valori particolari; inoltre il punto $(uv)$ non riesce più funzione univoca del punto $(xyz)$ della falda, ma funzione ad $h$ determinazioni, la falda venendo così rappresentata non sul piano $(uv)$ ma sopra un'involuzione di questo piano.

Sorge così il problema di determinare più esattamente il tipo dello sviluppo di $z$, in modo che la falda venga rappresentata biunivocamente su un piano.

Ciò riesce nel modo più semplice nel caso in cui $h = \nu$; allora si ha $\mu = r$, $\alpha = 1$, sicchè B risulta una potenza di A: $B = A^m$.

In tale ipotesi si ponga

$$u^{\mu} = x y^m \ , \ v = y \ ;$$

allora $z$, subendo le medesime sostituzioni che il punto $(uv)$, appare funzione univoca (ed univocamente invertibile) di questo, e si ha uno sviluppo

$$z = \Sigma\Sigma\, a_{ik}\, u^i\, v^k \ ,$$

che risulta un caso particolare di quello dato precedentemente

Più complessa riesce invece la rappresentazione nel caso di $h$ qualunque. Si ponga

$$u = x^{\frac{1}{\mu}}\, y^{\frac{k}{\nu}} \quad , \quad v = y^{\frac{h}{\nu}} \ ;$$

essendo $k$ ed $h$ primi fra di loro, $m\frac{1}{\mu} = \frac{\alpha k}{\nu}$, si ha che il punto $(uv)$ risulta funzione del punto $(xy)$ ad $r = \frac{\nu\mu}{h}$ determinazioni: al girare del punto $(xy)$ intorno ad $x = 0$ e ad $y = 0$, queste $r$ determinazioni si permutano secondo due sostituzioni A e B di periodi $\mu$ e $\nu$, e tali che

$$A^m = B^{\alpha} \ ,$$

sicchè il punto $(uv)$ ha lo stesso gruppo di monodromia che il punto $(xyz)$ della nostra falda.

Pertanto si ha per $z$ lo sviluppo in serie

$$z = \Sigma\Sigma\, a_{ik}\, u^i\, v^k \ ,$$

e la falda viene rappresentata biunivocamente sul piano $(uv)$ nell'intorno di $u = 0$, $v = 0$.

Più in generale, in luogo di porre

$$u = x^{\frac{1}{\mu}} y^{\frac{k}{\nu}},$$

si può porre

$$u = x^{\frac{1}{\mu}} y^{\frac{\lambda h + k}{\nu}},$$

con $\lambda$ intero: nel caso $B = A^m$, preso $\lambda = 0$, si ha $u = x^{\frac{1}{\mu}} x^{\frac{m}{\mu}}$, $v = y$, come avevamo già trovato; invece nel caso in cui A e B riescano indipendenti ($h = 1$, $\alpha = \nu$, $m = \mu$) posto $\lambda = -1$, si ha $u = x^{\frac{1}{\mu}}$, $v = y^{\frac{1}{\nu}}$.

Possiamo ora togliere l'ipotesi restrittiva che i rami $a$ e $b$ sieno gli assi $x = 0$ e $y = 0$; se tali rami sono dati rispettivamente da

$$y = \Sigma a_i x^i$$
$$y = \Sigma b_i y^i,$$

ci si riduce al caso precedente mediante la trasformazione

$$x' = y - \Sigma a_i x^i$$
$$y' = y - \Sigma b_i y^i,$$

regolare nell'intorno del punto $x = 0, y = 0$.

NOTA.* — Conviene osservare l'analogia fra lo sviluppo di $z$, dato sopra nel caso $B = A^m$, con lo sviluppo di Halphen di una falda d'ordine $\mu$ di una superficie nell'intorno di un punto generico di una curva cuspidale: se l'asse $x = 0$ è una curva cuspidale d'ordine $r = \mu$, e il punto $x = y = z = 0$ è un punto generico di questa, lo sviluppo di Halphen dà

$$z = \Sigma\Sigma\, a_{ix}\, x^{\frac{i}{\mu}} y^k.$$

La ragione di tale analogia sta in ciò: che, se si eseguisce una trasformazione birazionale dello spazio (per es. una trasformazione monoidale) la cui curva fondamentale abbia un contatto $m$-punto con una curva cuspidale d'ordine $r$ in un punto generico, P, di questa, si viene a creare un incrocio di due curve cuspidali (la vecchia curva cuspidale e una nuova sorgente dal punto P) cui corrisponde un incrocio di due curve di diramazione, che dà precisamente il caso in questione.

Lo sviluppo, invece, che si ottiene nel caso generale per $x^{\frac{1}{\mu}}, y^{\frac{1}{\nu}}$, rientra nel tipo degli sviluppi che Hensel credeva potersi dare per una falda qualunque di una superficie (al quale proposito cfr. Enriques-Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni*, vol. II, pag. 562; e più particolarmente B. Levi, Comptes Rendus, 17 marzo 1902).