ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Botanica. — *La flora del fossato di Palazzo Madama a Torino*. Memoria del Socio O. MATTIROLO.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Idromeccanica. — *Sull'integrazione dell'equazione caratteristica dei piccoli moti ondosi in un canale di qualunque profondità. II: Equazione del pelo libero.* Nota II [1] di UMBERTO CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

5. **Rappresenti** [2]

$$y = 1 + \eta(t\,;x)$$

l'equazione del pelo libero l in un generico istante t, per cui $\eta = y - 1$ è in ogni punto di l il sopraelevamento sullo specchio imperturbato $y = 1$ (si rammenti [N. 1] che si è assunto $= 1$ la profondità del canale allo stato imperturbato). Ora è [3]

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{per } y = 1, \tag{6}$$

essendo φ il potenziale cinetico, ossia la parte reale di f.

Ricavando dalla (1) la parte reale e tenendo presente che φ_n rappresenta la parte reale di f_n, si ha

$$\varphi = \sum_0^\infty {}_n \frac{t^n}{n!}\varphi_n . \tag{7}$$

Per la (6), mettendo in particolare e separata evidenza i termini della serie contenenti le potenze pari di t da quelli dipendenti dalle potenze dispari, si ottiene

$$\eta = -\frac{1}{g}\left\{\sum_0^\infty {}_n \frac{t^{2n}}{(2n)!}\varphi_{2n+1} + \sum_0^\infty {}_n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\varphi_{2n+2}\right\}, \text{ per } y = 1. \tag{8}$$

[1] Vedi la Nota I in questi Rendiconti, pag. 131.
[2] Cfr. la Nota *Equazione caratteristica* ecc., n. 1.
[3] Cfr. loco ultimo citato, formula (6).

6. Richiamo la (4)

$$\varphi_{n+2} = \frac{g}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4} (x_1 - x) \, dx_1 \, .$$

Integrando per parti, si può scrivere altresì

$$(9) \qquad \varphi_{n+2} = \frac{g}{2\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x_1) \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4} (x_1 - x) \, dx_1 \, .$$

Sia λ una generica funzione di x finita e continua al finito, e finita per $x = \pm \infty$, unitamente alle sue derivate; poniamo

$$(10) \qquad \begin{cases} \mathrm{I}[\lambda] = \dfrac{g}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x_1) \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4} (x_1 - x) \, dx_1 \, . \\ \mathrm{I}^2[\lambda] = \mathrm{I}[\mathrm{I}(\lambda)] \quad , \quad \mathrm{I}^3[\lambda] = \mathrm{I}[\mathrm{I}^2(\lambda)] \, , \text{ ecc.} \end{cases}$$

Scende da queste che, per un r generico, è

$$(11) \qquad \frac{d^r}{dx^r} \mathrm{I}[\lambda] = \mathrm{I}\left[\frac{d^r \lambda}{dx^r}\right].$$

Convenendo che $\mathrm{I}^0[\lambda] = \lambda$, dalle (9) si deduce, tenendo conto delle (10-11),

$$\varphi_{2n} = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \mathrm{I}^n[\varphi_0] \quad , \quad \varphi_{2n+1} = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \mathrm{I}^n[\varphi_1] ,$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots) ;$$

per cui all'espressione (8) di η può sostituirsi la seguente:

$$(12) \quad \eta = -\frac{1}{g} \left\{ \sum_0^\infty {}_n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \mathrm{I}^n[\varphi_1] + \sum_0^\infty {}_n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{d^{2n+2}}{dx^{2n+2}} \mathrm{I}^{n+1}[\varphi_0] \right\}.$$

In questa relazione viene messo in rilievo il modo di dipendenza della forma del pelo libero ad ogni istante dai valori di φ_0 e φ_1 per $y = 1$. — Risulta, dalla (7), che φ_0 è l'espressione di φ per $t = 0$ e φ_1 quella di $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ per $t = 0$; ne segue, per la (6), chiamando η_0 il sopraelevamento iniziale del polo imperturbato $y = 1$, che

$$\varphi_1 = -\eta_0 \, .$$

Per (10), si ha

$$\mathrm{I}^n[\varphi_1] = \mathrm{I}^n[-g\eta_0] = -g \, \mathrm{I}^n[\eta_0] ;$$

per cui la (12) può venire sostituita dalla seguente:

$$(13)\qquad \eta = \sum_0^\infty {}_n \frac{t^{2n}}{(2n)!}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \mathrm{I}^n[\eta_0] - \frac{1}{g}\sum_0^\infty {}_n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{d^{2n+2}}{dx^{2n+2}} \mathrm{I}^{n+1}[\varphi_0]\,.$$

Rimane ora da discutersi l'equiconvergenza delle due serie. Ci occuperemo della prima soltanto, dato il particolare interesse del problema ondoso che ad essa si riferisce. Le considerazioni ad essa relative sono però senz'altro applicabili anche all'altra serie.

7. Il problema di particolare interesse che ho accennato è quello delle onde di emersione. Essendo nulli gli impulsi iniziali, notoriamente deve essere $\varphi_0 = 0$; la (13) si riduce allora alla prima serie, cioè

$$(14)\qquad \eta = \sum_0^\infty {}_n \frac{t^{2n}}{(2n)!}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \mathrm{I}^n[\eta_0]\,.$$

Mediante questa relazione, risulta definito il profilo dell'onda in qualunque istante (finito), quando sia noto il profilo iniziale (per $t = 0$).

8. Occupiamoci ora della convergenza della serie (14). Converrà a tal uopo seguire, fino ad un certo punto, il metodo della media aritmetica escogitato da Neumann per la risoluzione del problema di Dirichlet [1].

Si consideri l'integrale

$$\mathrm{I}[\eta_0] = \frac{g}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \eta_0(x_1) \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1\,,$$

e si noti che, se η_0 designa una qualsiasi funzione di x_1 finita e continua al finito e finita (o anche dotata di singolarità polare, comunque elevata) per $x_1 = \pm\infty$, $\mathrm{I}[\eta_0]$ è una funzione di x, finita e continua anche all'∞ [2]. Sieno M e m rispettivamente il massimo e il minimo di η_0, e si divida l'intervallo $(-\infty, +\infty)$ in due parti α e β tali che: nella prima il valore di η_0 sia superiore a $\frac{\mathrm{M}+m}{2}$, nell'altra sia $\eta_0 \leq \frac{\mathrm{M}+m}{2}$; si ha

$$\frac{2\pi}{g}\mathrm{I}[\eta_0] \leq \mathrm{M}\int_\alpha \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1 + \\ + \frac{\mathrm{M}+m}{2}\int_\beta \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1\,,$$

$$\frac{2\pi}{g}\mathrm{I}[\eta_0] \geq \frac{\mathrm{M}+m}{2}\int_\alpha \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1 + \\ + m\int_\beta \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1\,.$$

(1) Cfr. ad es. Picard, *Traité d'analyse*, tome I.

(2) Cfr. Levi-Civita, loc. cit. *Trasformazione di una relazione* ecc., n. 5.

Aggiungendo e togliendo $M \int_\beta \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1$ dal secondo membro della prima, e $m \int_\alpha \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1$ dal secondo membro della seconda, dalle precedenti si ottiene

$$\frac{2\pi}{g} \mathrm{I}[\eta_0] \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1 - \\ - \frac{M - m}{2} \int_\beta \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1 ,$$

$$\frac{2\pi}{g} \mathrm{I}[\eta_0] \geq m \int_{-\infty}^{+\infty} \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1 + \\ + \frac{M - m}{2} \int_\alpha \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1 .$$

Ora è [1]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1 = 1 ; \tag{15}$$

per cui, ponendo

$$\frac{1}{2\pi} \int_\alpha \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1 = \theta_\alpha ,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_\beta \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4}(x_1 - x)\, dx_1 = \theta_\beta ,$$

con che θ_α e θ_β sono numeri positivi e, di più, $\theta_\alpha + \theta_\beta = 1$, le precedenti limitazioni possono scriversi

$$m + \frac{M - m}{2} \theta_\alpha \leq \frac{1}{g} \mathrm{I}[\eta_0] \leq M - \frac{M - m}{2} \theta_\beta .$$

Chiamiamo θ'_α e θ'_β ciò che divengono θ_α e θ_β rispettivamente per $x = x'$; allora dalla precedente limitazione si ricava, per qualunque coppia di punti x, x',

$$\frac{1}{g} \left\{ \mathrm{I}[\eta_0(x)] - \mathrm{I}[\eta_0(x')] \right\} \leq M - m - \frac{M - m}{2} (\theta_\beta + \theta'_\alpha) ,$$

$$\frac{1}{g} \left\{ \mathrm{I}[\eta_0(x)] - \mathrm{I}[\eta_0(x')] \right\} \geq m - M + \frac{M - m}{2} (\theta_\alpha + \theta'_\beta) .$$

[1] Cfr. Levi-Civita, loc. cit., formula (18).

Si noti che le quantità positive $\frac{\theta_\alpha}{2}, \frac{\theta_\beta}{2}, \frac{\theta'_\alpha}{2}, \frac{\theta'_\beta}{2}$ sono minori ciascuna di $\frac{1}{2}$; ne segue che

$$\frac{\theta_\beta + \theta'_\alpha}{2} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{\theta_\alpha + \theta'_\beta}{2} < 1 ;$$

dalle precedenti si deduce pertanto

$$| \mathrm{I}[\eta_0(x)] - \mathrm{I}[\eta_0(x')] | < \mu g (\mathrm{M} - m) ,$$

essendo $0 < \mu < 1$. Siccome questo vale qualunque sia la coppia di punti x e x', designando M_1 e m_1 il massimo e il minimo di $\mathrm{I}[\eta_0]$ si ottiene

$$\mathrm{M}_1 - m_1 < \mu g (\mathrm{M} - m).$$

Chiamando M_n e m_n il massimo e il minimo di $\mathrm{I}^n[\eta_0]$, si avrà, applicando successivamente n volte il precedente risultato,

(16) $$\mathrm{M}_n - m_n = \mu^n g^n (\mathrm{M} - m).$$

Scende da questa che

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mathrm{M}_n - m_n}{g^n} = 0 ;$$

il che autorizza ad asserire che, se $\frac{\mathrm{I}^n[\eta_0]}{g^n}$ ammette un limite quando $n = \infty$, esso è una *costante* perchè la differenza tra il massimo $\frac{\mathrm{M}_n}{g^n}$ e il minimo $\frac{m_n}{g^n}$ tende a zero quando n cresce indefinitamente.

9. Ora $\frac{\mathrm{I}^n[\eta_0]}{g^n}$ tende effettivamente a un limite. Infatti consideriamo l'integrale

$$\mathrm{I}^n[\eta_0(x)] = \frac{g}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}^{n-1}[\eta_0(x_1)] \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4} (x_1 - x)\, dx_1 ;$$

togliendo, da entrambi i membri di questa, $g\,\mathrm{I}^{n-1}[\eta_0(x)]$, si ha, tenendo presente la (15),

$$\mathrm{I}^n[\eta_0(x)] - g\,\mathrm{I}^{n-1}[\eta_0(x)] =$$
$$= \frac{g}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \mathrm{I}^{n-1}[\eta_0(x_1)] - \mathrm{I}^{n-1}[\eta_0(x)] \right\} \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi}{4} (x_1 - x)\, dx_1 .$$

Essendo, per la (16),

$$\left| \mathrm{I}^{n-1}[\eta_0(x_1)] - \mathrm{I}^{n-1}[\eta_0(x)] \right| \leq \mathrm{M}_{n-1} - m_{n-1} < \mu^{n-1} g^{n-1} (\mathrm{M} - m) ,$$

dalla precedente scende, tenendo conto della (15),

$$\left| I^n[\eta_0(x)] - g\, I^{n-1}[\eta_0(x)] \right| < \mu^{n-1} g^n (M - m),$$

ovvero

$$\left| \frac{I^n[\eta_0]}{g^n} - \frac{I^{n-1}[\eta_0]}{g^{n-1}} \right| < \mu^{n-1}(M - m). \tag{17}$$

Allora, se si scrive

$$\frac{I^n[\eta_0]}{g^n} = \eta_0 + \left\{ \frac{I[\eta_0]}{g} - \eta_0 \right\} +$$

$$+ \left\{ \frac{I^2[\eta_0]}{g^2} - \frac{I[\eta_0]}{g} \right\} + \cdots + \left\{ \frac{I^n[\eta_0]}{g^n} - \frac{I^{n-1}[\eta_0]}{g^{n-1}} \right\},$$

si vede che

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{g^n} I^n[\eta_0]$$

si può considerare somma di una serie i cui termini, per la (17), decrescono come quelli di una serie geometrica la cui ragione, in valore assoluto, è < 1. Quindi il limite predetto esiste e, per quanto si è rilevato nel numero precedente, è una costante.

10. Si deduce, dopo ciò, che

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{g^n} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} I^n[\eta_0] = 0;$$

per cui, assegnato un numero $\varepsilon > 0$, si può trovare un n_0 tale che

$$\left| \frac{1}{g^n} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} I^n[\eta_0] \right| < \varepsilon, \quad \text{per} \quad n > n_0. \tag{18}$$

Riprendiamo la serie (14) che definisce η. Essa può scriversi

$$\eta = \eta' + \sum_{n_0+1}^{\infty}{}_n \frac{g^n t^{2n}}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \left(\frac{1}{g^n} I^n[\eta_0] \right),$$

avendo posto

$$\eta' = \sum_{1}^{n_0}{}_n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} I^n[\eta_0];$$

per la (18) la serie che segue η' nell'espressione di η è manifestamente equiconvergente per qualunque valore finito di t, e per essa lo è pure la (14), c. v. d.