ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Matematica. — *Campo newtoniano viciniore ad un campo vettoriale assegnato.* Nota di O. Onicescu, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. La nozione di armonica viciniore ad una funzione assegnata, in una data regione di spazio, introdotta dal prof. Levi-Civita, nella precedente Nota, si può estendere al gradiente di una funzione, o più generalmente ad un campo vettoriale qualsiasi, proponendosi di caratterizzare il campo newtoniano che meno se ne discosta globalmente (il campo viciniore).

La discussione di tale campo viciniore riesce abbastanza semplice, applicando il criterio variazionale di cui si è servito il prof. Levi-Civita nella sua Nota. Il relativo potenziale newtoniano rimane determinato dalle due equazioni integrali lineari di seconda specie derivate dal principio di Dirichlet.

Come si vede, questo problema è anche più semplice di quello concernente l'armonica viciniore che richiede l'intervento di una funzione biarmonica.

Il campo newtoniano viciniore ad un campo prefissato è suscettibile di una espressiva interpretazione fisica nella teoria della induzione magnetica. E questo fatto rende, in certo modo, ragione della relativa semplicità del corrispondente problema analitico di approssimazione, costituendone, nello stesso tempo, ciò che si può chiamare una integrazione fisica.

2. Sia, dunque, una porzione finita S dello spazio ordinario, limitata da un contorno σ, costituito da un numero finito di porzioni di superficie regolari, e sia un campo vettoriale (V), di componenti X, Y, Z finite e continue in S e σ.

Essendo Q e Q' punti di σ, P un punto generico di S, rappresentiamo con $r(P, Q)$ la distanza dei due punti P e Q, e con $\mu(Q)$ una funzione del punto Q, finita e continua in ogni porzione regolare di σ.

Considereremo un insieme $\mathfrak{S}$ di funzioni armoniche u sottoposte alle stesse limitazioni qualitative di cui nel precedente problema dell'armonica viciniore; potremo in conformità rappresentarci u come potenziale di semplice strato, di densità $\mu(Q)$,

$$(1) \qquad u(P) = \int_\sigma \frac{\mu(Q)}{r(P, Q)} d\sigma .$$

3. Il campo newtoniano viciniore al campo (V) sarà quello che deriva da un potenziale u, e rende minimo l'integrale

$$I = \int_S \sum \left[\frac{\partial u(P)}{\partial x} - X(P) \right]^2 dS .$$

Dato il carattere quadratico di I (cfr. in particolare il n. 3 della Nota precedente), la condizione necessaria e sufficiente pel minimo è semplicemente $\delta I = 0$, dove la variazione δ si riporta alla variazione di u nel campo armonico. Con questa intesa, si ha

$$\delta I = 2\int_S \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x} - X\right)\frac{\partial \delta u}{\partial x}\, dS .$$

In base a (1), la variazione armonica δu si può esprimere per la variazione arbitraria (a parte la condizione di continuità) $\delta_1 \mu$, sotto la forma

$$\delta u = \int_\sigma \frac{\delta_1 \mu}{r(P, Q)}\, d\sigma .$$

Introduciamo questa espressione di δu, e invertiamo gli integrali, operazione evidentemente legittima: si ha

$$\delta I = 2\int_\sigma \delta_1 \mu\, d\sigma \int_S \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x} - X\right)\frac{\partial \dfrac{1}{r(P, Q)}}{\partial x}\, dS .$$

Per l'arbitrarietà di $\delta_1 \mu$, la condizione $\delta I = 0$ dà

$$\int_S \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x} - X\right)\frac{\partial \dfrac{1}{r(P, Q)}}{\partial x}\, dS = 0 . \tag{2}$$

Ponendo

$$\int_S \sum X\, \frac{\partial \dfrac{1}{r(P, Q)}}{\partial x} = \varphi(Q) . \tag{α}$$

funzione conosciuta, tale essendo per ipotesi il campo (**V**), u sarà determinata dalla seguente equazione integro-differenziale:

$$\varphi(Q) = \int_S \sum \frac{\partial u}{\partial x}\, \frac{\partial \left(\dfrac{1}{r(P, Q)}\right)}{\partial x}\, dS . \tag{3}$$

Integrando per parti il secondo membro, e osservando che $\Delta_2 u = 0$ in tutto il campo S di integrazione, ove si indichi con Q′ un punto generico di σ, e con n_i la normale a σ in Q′ (volta verso l'interno del campo), risulta

$$\varphi(Q) = -\int_\sigma \frac{1}{r(Q, Q')}\, \frac{du}{dn_i}\, d\sigma \tag{β}$$

che è una equazione integrale di prima specie rispetto ai valori limiti (dall'interno del campo) della derivata normale di u, al contorno. La determinazione di u risulta facile. Infatti, consideriamo la formola classica

$$4\pi u(\mathrm{P}) = \int_\sigma \left[u(\mathrm{Q}') \frac{d\left(\frac{1}{r(\mathrm{P},\mathrm{Q}')}\right)}{dn_i} - \frac{1}{r(\mathrm{P},\mathrm{Q}')} \frac{du}{dn_i} \right] d\sigma .$$

Se facciamo tendere P verso Q, al contorno, la prima parte dell'integrale avrà una discontinuità, la seconda resta continua; sicchè si può scrivere

$$4\pi u(\mathrm{Q}) = 2\pi u(\mathrm{Q}) + \int_\sigma u(\mathrm{Q}') \frac{d\frac{1}{r(\mathrm{Q},\mathrm{Q}')}}{dn_i} d\sigma - \int_\sigma \frac{1}{r(\mathrm{Q},\mathrm{Q}')} \frac{du}{dn_i} d\sigma .$$

Tenendo conto di (β) e ordinando, avremo l'equazione integrale

$$(\gamma) \qquad 2\pi u(\mathrm{Q}) - \int_\sigma u(\mathrm{Q}') \frac{d\frac{1}{r(\mathrm{Q},\mathrm{Q}')}}{dn_i} d\sigma = \varphi(\mathrm{Q})$$

che interviene nella determinazione di una funzione armonica quando si dà la sua derivata normale al contorno, e che si può chiamare equazione di Robin.

La risoluzione di questa equazione ci dà una unica soluzione $u(\mathrm{Q})$, cioè i valori al contorno della funzione armonica cercata; e la questione è ridotta al classico problema di Dirichlet.

Denotiamo, nel senso del prof. Volterra, con $\mathrm{R}(|\varphi|)$ l'operazione funzionale che dà la soluzione della equazione (γ) di Robin, e con $\mathrm{N}(|u|)$ l'analoga risolvente della equazione coniugata — di Neumann —

$$2\pi \varrho(\mathrm{Q}) + \int_\sigma \varrho(\mathrm{Q}) \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} d\sigma = u(\mathrm{Q}).$$

Se ci rappresentiamo la cercata funzione armonica u con un potenziale di doppio strato, di momento $\varrho(\mathrm{Q})$,

$$(\delta) \qquad u(\mathrm{P}) = \int_\sigma \varrho(\mathrm{Q}) \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} d\sigma ,$$

abbiamo $\varrho(\mathrm{Q}) = \mathrm{N}(|u(\mathrm{Q})|)$ e, in definitiva,

$$(\varepsilon) \qquad \varrho(\mathrm{Q}) = \mathrm{NR}(|\varphi(\mathrm{Q})|) .$$

Rimane così stabilita l'univoca esistenza della cercata funzione armonica. Perciò *il campo newtoniano viciniore ad un campo vettoriale dato, entro una regione* S *prefissata, è pure univocamente determinato, e la sua determinazione conduce all'operazione funzionale* (ε) *seguita da una integrazione* (δ).

4. Generalità sui campi appartenenti allo stesso campo viciniore. — La determinazione del campo newtoniano non parte direttamente dal campo vettoriale, ma dalla funzione $\varphi(Q)$ subordinata al campo stesso mediante la (α).

Tutti i campi vettoriali, ai quali corrisponde, in S, la stessa $\varphi(Q)$, hanno lo stesso campo newtoniano viciniore, e formano una classe di campi, alla quale — si può facilmente verificare — appartiene anche il comune campo newtoniano viciniore.

In particolare esiste una classe di campi vettoriali, ai quali corrisponde $\varphi(Q) \equiv 0$ e, per conseguenza, $u \equiv 0$.

Se chiamiamo con $(\mathbf{v})$ il campo newtoniano viciniore ad un campo $(\mathbf{V})$ in base alla relazione (2), si può dire che

Un generico campo vettoriale della classe dei campi appartenenti allo stesso newtoniano viciniore $(\mathbf{v})$, *entro* S, *si può comporre per addizione di questo campo* $(\mathbf{v})$, *con un generico campo* $(\mathbf{V}_0)$ *della classe di viciniore newtoniano nullo*, ciò che si può compendiare nella formola

$$(\mathbf{V}) = (\mathbf{v}) + (\mathbf{V}_0) \quad \text{(nel campo S).}$$

Questa relazione permette di estendere certe proprietà, verificate per la classe speciale dei campi $(\mathbf{V}_0)$, ad un generico campo $(\mathbf{V})$.

5. Interpretazione fisica. — Per collegare il problema analitico di approssimazione, testè trattato, ad un problema fisico, immaginiamo che la regione S sia occupata da un corpo magnetico e che il campo assegnato $(\mathbf{V})$ rappresenti precisamente la distribuzione dei momenti magnetici in S.

Il potenziale magnetico di tale distribuzione in un generico punto potenziato P_1 sarà

$$\text{(1)} \qquad U(P_1) = \int_S \sum X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS,$$

dove $r = r(P, P_1)$, P designando il punto potenziante.

U è una funzione continua in tutto lo spazio e, come è noto, eseguendo una integrazione per parti, si può esprimere come la somma di un potenziale di superficie e di uno di volume

$$\text{(2)} \qquad U = -\int_S \operatorname{div} \mathbf{V} \frac{dS}{r} - \int_\sigma \mathbf{V} \times n_i \frac{d\sigma}{r}.$$

Dalla (1), o indifferentemente dalla (2), appare che U è armonica nello spazio esterno a S.

Nell'interno della massa magnetica, applicando a (2) il teorema di Poisson, si ha

$$\Delta_2 U = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{V}.$$

Osserviamo che il potenziale armonico U è perfettamente determinato nello spazio esterno ad S se si dànno i suoi valori al contorno.

Consideriamo, adesso, come campo dei momenti magnetici in S il campo newtoniano (**v**) viciniore al campo (**V**).

Essendo $\mathbf{v} = \operatorname{grad} u$ (u armonica), si tratta manifestamente di una distribuzione lamellare e solenoidale.

Il potenziale

$$(3) \qquad U^{\star} = \int_S \sum \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS \equiv - \int_\sigma \frac{du}{dn_i} \frac{d\sigma}{r}$$

determinato dalla nuova magnetizzazione del campo, sarà, come il precedente, armonico fuori di S, e, in questo caso, per l'armonicità di u, anche dentro.

Riportandoci alle equazioni (ε) e seguente del n. 3, risulta che i valori dei potenziali U e $U^{\star}$, ambedue armonici all'esterno di S, sono uguali sul contorno, avendo in un generico punto Q di σ il valore comune $\varphi(Q)$.

Dunque, nello spazio esterno avremo

$$(\iota) \qquad U \equiv U^{\star}.$$

Il campo newtoniano viciniore a (**V**) *rappresenta dunque quella unica magnetizzazione lamellare e solenoidale dello spazio* S *che dà luogo allo stesso campo magnetico esterno.*

Si può dare a questa conclusione una forma fisicamente più espressiva.

Immaginiamo, da un lato, che il campo S sia occupato da un magnete permanente.

Supponiamo, d'altro lato, che, sostituito al magnete permanente un pezzo di ferro dolce il quale occupi lo stesso spazio S, si mantenga con un mezzo qualunque, per esempio con una opportuna corrente superficiale, lo stesso potenziale magnetico U, nel campo esterno ad S.

Il teorema precedente afferma l'esistenza e l'unicità della magnetizzazione del ferro dolce.

Ma questo si può considerare come un fatto di esperienza, ed allora *la induzione magnetica che si desta nel ferro dolce, induzione che l'esperienza dimostra stabile ed unica, dà il campo newtoniano viciniore al campo* (**V**) *del magnete permanente.*

Abbiamo dunque una risoluzione fisica del problema analitico, e quindi anche dell'operazione funzionale $NR(|\varphi(Q)|)$.