ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Matematica. — *Sulla ricerca delle funzioni primitive.* Nota III [1] di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

5. Vogliamo escludere in (8) il segno di maggiore. Indichiamo con $\Psi(x)$ il primo membro della disuguaglianza detta e con $\Lambda^*(x)$ il suo numero derivato superiore destro. Se x appartiene ad un intervallo (a_m, b_m) contiguo a P_1, ed è distinto da b_m, in x esiste ed è nulla la derivata destra dell'integrale di φ, mentre la sommatoria Σ'_x ha lo stesso numero derivato superiore destro di $F(x)$. È dunque, per gli x detti, $\Lambda^* = \overline{\Lambda}$. Se poi x è un punto di P_1, non primo estremo di un intervallo contiguo all'insieme, il numero derivato superiore destro di Σ'_x è ≤ 0, perchè i termini di questa serie sono tutti negativi, per la (2) del n. 3. Ma quasi dappertutto su P_1, la derivata dell'integrale della φ esiste ed è $= \varphi = \overline{\Lambda}$; dunque, quasi dappertutto su P_1, è $\Lambda^* \leq \overline{\Lambda}$. Se ora osserviamo che la (8) del n. 4 vale anche su ogni porzione di P_1, abbiamo, per tutti gli x ora considerati, $\Lambda^* \geq \overline{\Lambda}$ e perciò, quasi dappertutto su P_1, $\Lambda^* = \overline{\Lambda}$. Questa uguaglianza vale così quasi dappertutto su $(p^{(0)}, p^{(1)})$; e in tutto questo intervallo è poi sempre $0 \geq \Lambda^* \geq \overline{\Lambda}$. Se ne conclude che Λ^* non può essere infinito (e $= -\infty$) che nei punti in cui è $\overline{\Lambda} = -\infty$, cioè in un insieme di punti che non contiene nessun insieme perfetto, e che le funzioni $F(x)$ e $\Psi(x)$ non possono differire che per una costante [2]. Essendo poi $\Psi(p^{(0)}) = 0$, risulta dimostrata la (3) del n. 4 per la $F(x)$ e quindi anche per la $f(x)$.

OSSERVAZIONE. — La formula (3) del n. 4 vale evidentemente anche per ogni porzione di P_1. Inoltre, se x_1 e x_2 sono due punti qualsiasi di $(p^{(0)}, p^{(1)})$, si ha

$$(1) \qquad f(x_2) - f(x_1) = \int_{P_1[x_1, x_2]} \Lambda(x)\, dx + \sum_{x_1, x_2} \{ f(b_n) - f(a_n) \},$$

dove $P_1[x_1, x_2]$ indica l'insieme dei punti di P_1 contenuti in (x_1, x_2) e la $\sum\limits_{x_1, x_2}$ è estesa agli intervalli contigui a P_1 contenuti in (x_1, x_2) ed anche a quelle parti (due al più) di tali intervalli eventualmente contenute nel segmento indicato.

6. Dato un insieme perfetto P di (a, b), diremo che un suo punto p è *singolare* se non appartiene come punto *interno* (cioè distinto dagli estremi)

[1] Continuazione della Nota II (questi Rendiconti, vol. XXIX, 1° sem., pp. 106-110).

[2] Ciò per un noto teorema di Scheeffer generalizzato da Ch. J. de la Vallée Poussin (*Cours d'analyse infinitésimale*, tom. I, 3$^{\text{me}}$ édit., pag. 101).

a nessuna porzione di P sulla quale valgano le proprietà dei nn. 1-4. L'insieme C dei punti singolari di P è necessariamente chiuso. Se (α, β) è un intervallo contiguo a C, posto $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, si ha

$$f(\beta') - f(\alpha') = \int_{P[\alpha', \beta']} A(x)\, dx + \sum_{\alpha', \beta'} \{ f(b_n) - f(a_n) \}.$$

Ed infatti, detta P_1 la porzione di P di massima lunghezza contenuta in (α', β'), ogni punto di P_1 è interno ad una porzione di P su cui valgono tutte le proprietà dei nn. 1-4. Per un noto teorema di Borel, si può allora ricoprire tutto P_1 con un numero finito di porzioni di P su ciascuna delle quali valgano le stesse proprietà; e queste varranno perciò su l'intero insieme P_1 ed anche su una porzione P'_1 di P contenente come punti interni tutti quelli di P_1. L'uguaglianza sopra scritta non è dunque che la (1) del n. 5 applicata all'intervallo (α', β') e all'insieme P'_1.

Data la continuità della $f(x)$, con un passaggio al limite, si ottiene il valore della differenza $f(\bar{\beta}) - f(\bar{\alpha})$, per qualsiasi intervallo $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ appartenente ad (α, β).

Se il primo estremo c_1 di C non coincide con a, quanto si è detto per (α, β) vale anche per (a, c_1). Altrettanto dicasi per (c_2, b), dove c_2 è il secondo estremo di C. Se c è un punto isolato di C, ed α e β sono i punti di C più prossimi ad esso, a sinistra e a destra, applicando quanto si è ora detto agli intervalli (α, c), (c, β), si ottengono le differenze $f(c) - f(\alpha)$, $f(\beta) - f(c)$ e quindi, sommando, anche $f(\beta) - f(\alpha)$; e si ottiene pure $f(\bar{\beta}) - f(\bar{\alpha})$, dove $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ è un qualsiasi intervallo di (α, β). Così proseguendo, si ottiene la differenza $f(\beta) - f(\alpha)$ relativa ad un qualsivoglia intervallo (α, β) appartenente ad un intervallo contiguo al primo derivato C' di C. Ripetendo queste operazioni un'infinità numerabile di volte, si ottiene il valore di $f(\beta) - f(\alpha)$ per un qualsiasi (α, β) appartenente ad un intervallo contiguo al massimo insieme perfetto $P^{(1)}$ contenuto in C.

Osserviamo qui che, per le proposizioni dei nn. 1-4, $P^{(1)}$ *è ovunque non denso su* P.

7. Prendiamo come insieme perfetto P l'insieme di tutti i punti di (a, b) e indichiamo con $C^{(1)}$ l'insieme dei suoi punti singolari, i quali attualmente sono quelli che non appartengono come punti interni a nessun intervallo parziale di (a, b) su cui A sia limitato superiormente, integrabile e soddisfacente alla

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_2}^{x_1} A\, dx.$$

Detto $P^{(1)}$ il massimo insieme perfetto contenuto in $C^{(1)}$, col procedimento del numero precedente otteniamo il valore della differenza $f(\beta) - f(\alpha)$

relativo ad un qualsivoglia intervallo contenuto in un intervallo contiguo a $P^{(1)}$. Partendo da $P^{(1)}$ e detto $P^{(2)}$ il massimo insieme perfetto contenuto nell'insieme dei punti singolari di $P^{(1)}$, otteniamo, col procedimento del numero precedente, il valore della differenza $f(\beta)-f(\alpha)$ per qualsiasi (α, β) contenuto in un intervallo contiguo a $P^{(2)}$. E così proseguiamo *transfinitamente.*

Ciascuno degli insiemi perfetti che così veniamo a costruire,

$$P^{(1)}, P^{(2)}, \dots P^{(\omega)}, P^{(\omega+1)}, \dots P^{(2\omega)}, P^{(2\omega+1)}, \dots,$$

è contenuto in tutti i precedenti. Se dunque non esistesse fra questi un ultimo insieme, esisterebbe un certo numero transfinito $\bar{\omega}$ per il quale $P^{(\bar{\omega})}$ risulterebbe identico a tutti gli insiemi P che lo seguono (¹). Ma $P^{(\bar{\omega}+1)}$, dovendo essere ovunque non denso su $P^{(\bar{\omega})}$, non può coincidere con $P^{(\bar{\omega})}$, e resta così dimostrata l'esistenza di un ultimo insieme $P^{(\bar{\omega})}$. Applicato allora a questo $P^{(\bar{\omega})}$ il procedimento del numero precedente, si ottiene $f(\beta)-f(\alpha)$ per un qualsiasi (α, β) di (a, b). *Il procedimento, indicato in questo e nel numero precedente, permette quindi di risalire dalla conoscenza del numero derivato superiore destro $\Lambda(x)$ alla funzione continua $f(x)$ (a meno di una costante arbitraria), nell'ipotesi, fino ad ora ammessa, che Λ sia sempre finito o, tutt'al più, uguale a $-\infty$ in un insieme che non contenga alcun insieme perfetto.*

8. Supponiamo ora che, ferma restando l'ipotesi fatta sull'insieme $E_{-\infty}$ dei punti in cui è $\Lambda=-\infty$, il numero derivato Λ possa diventare anche uguale a $+\infty$, purchè l'insieme $E_{+\infty}$ dei punti in cui è $\Lambda=+\infty$ non contenga neppur esso alcun insieme perfetto. Dimostriamo subito che anche in questo caso vale la proposizione: *in ogni insieme perfetto* P *di* (a, b) *esiste sempre almeno una porzione sulla quale Λ ammette un limite superiore finito.*

Supponiamo, infatti, la proposizione non vera e cioè che, preso comunque un numero N, su ogni porzione di P esista sempre almeno un punto in cui è $\Lambda > N$. Si divida in due parti uguali il minimo segmento che contiene l'insieme P e, detto c il punto di divisione, si indichino con P_1 e P_2 le due massime porzioni di P_1 alla sinistra e alla destra di c. Detto n un intero positivo qualunque, esiste in P_1 almeno un punto q a cui corrisponde un q' (non necessariamente appartenente a P_1) di (a, b) in modo che sia

$$0 < q'-q \leq \frac{1}{n}, \quad f(q')-f(q) \geq 2n(q'-q).$$

Sia $2l$ il limite superiore delle differenze $q'-q$ relative a tali coppie; sia

(¹) Cfr. R. Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues* (Paris, Gauthier-Villars, 1905, p. 92).

poi $q_{n,1}$ il limite inferiore dei q a cui corrispondono differenze $q' \quad q \geq l$. Questo $q_{n,1}$ appartiene necessariamente a P_1 e, per la continuità della funzione $\dfrac{f(q')-f(q)}{q'-q}$, quando $q'-q \geq l > 0$, possiamo affermare l'esistenza in (a, c) di almeno un punto q' tale che sia

$$l \leq q'-q_{n,1} \leq \frac{1}{n}, \quad f(q')-f(q_{n,1}) \geq 2n(q'-q_{n,1}).$$

Fra questi q' sia $q'_{n,1}$ il minore, e indichiamo con $d_{n,1}$ il massimo intervallo della retta su cui giace (a, b), che ha per centro il punto $q_{n,1}$, ampiezza $\leq q'_{n,1}-q_{n,1}$ $\left(\text{e quindi } \leq \frac{1}{n}\right)$, e tale che, per ogni suo punto q, valga la disuguaglianza $f(q'_{n,1})-f(q) \geq n(q'_{n,1}-q)$.

Operando in modo analogo su P_2, troveremo un intervallo $d_{n,2}$, di lunghezza $\leq \frac{1}{n}$ e avente il centro $q_{n,2}$ in un punto di P_2, ed un punto $q'_{n,2}$, ad esso esterno, e tale che sia $0 < q'_{n,2}-q_{n,2} \leq \frac{1}{n}$ ed anche $f(q'_{n,2})-f(q) \geq n(q'_{n,2}-q)$, per ogni punto q di $d_{n,2}$. Indichiamo poi con P_3, P_4, P_5 le massime porzioni di P eventualmente rimanenti alla sinistra di $d_{n,1}$, fra $d_{n,1}$ e $d_{n,2}$, e alla destra di $d_{n,2}$. Su ciascuna di queste porzioni si operi come già si è fatto su P, dividendo però i minimi segmenti che le contengono, non in due, ma in quattro parti. E così si prosegua indefinitamente, raddoppiando sempre il numero delle parti in cui si dividono i minimi segmenti che contengono le porzioni di P che si considerano. Si otterrà in tal maniera una successione (eventualmente ridotta ad un numero finito) di intervalli

$$(\alpha) \qquad d_{n,1}, d_{n,2}, d_{n,3}, \ldots, d_{n,r}, \ldots,$$

aventi tutti il centro su P e lunghezza sempre $\leq \frac{1}{n}$, ovunque densi su P [1] e tali che esista, per ognuno di essi, un punto $q'_{n,r}$, esterno e alla destra di $d_{n,r}$; e soddisfacente alle disuguaglianze $0 < q'_{n,r}-q_{n,r} \leq \frac{1}{n}$, $f(q'_{n,r})-f(q) \geq n(q'_{n,r}-q)$, dove $q_{n,r}$ è il centro di $d_{n,r}$ e q è un punto qualsiasi di quest'intervallo. Dando ad n tutti i valori interi positivi, si ottengono infinite successioni (α), e, detto E_n l'insieme dei punti appartenenti ad almeno un $d_{n,r} (r=1, 2, \ldots)$, l'insieme E dei punti che appartengono a tutti gli E_n $(n=1, 2, \ldots)$ ha la potenza del continuo e contiene un insieme perfetto

[1] Vale a dire, in ogni porzione di P vi è almeno un punto appartenente ad uno degli intervalli detti.

[perchè gli elementi di (α) sono ovunque densi sull'insieme perfetto P [1]]. Sia P' tale insieme perfetto e p un suo punto. Detto $d_{n,r}$ un intervallo di (α) che contiene p, è $f(q'_{n,r}) - f(p) \geq n(q'_{n,r} - p)$; e poichè $q'_{n,r}$, essendo esterno e alla destra di $d_{n,r}$, è pure alla destra di p, ed è

$$q'_{n,r} - q_{n,r} \leq \frac{1}{n}, \quad |q_{n,r} - p| \leq \frac{1}{2n}.$$

è necessariamente $\Lambda(p) = +\infty$. Da ciò segue che $E_{+\infty}$ contiene un insieme perfetto, contro l'ipotesi fatta. La proposizione enunciata è dunque provata. E poichè tale proposizione non è che quella del n. 1 per il caso attuale, si conclude che il procedimento indicato ai nn. 6 e 7 permette di calcolare la differenza $f(\beta) - f(\alpha)$ per qualsiasi intervallo (α, β) di (a, b). Il procedimento ricordato non è che quello di integrazione alla Denjoy, e possiamo così affermare che

il procedimento di integrazione alla Denjoy permette di risalire, dalla conoscenza di un numero derivato, alla funzione primitiva, continua (che viene determinata a meno di una costante), nell'ipotesi che nessuno dei due insiemi $E_{-\infty}$, $E_{+\infty}$ *dei punti in cui il numero derivato è uguale a* $-\infty$, $+\infty$, *contenga un insieme perfetto.*

Di qui segue anche che non possono esistere due funzioni continue, differenti fra loro non per una sola costante, e aventi uno stesso numero derivato soddisfacente alla condizione sopra indicata. Il problema posto nell'introduzione è dunque risoluto, ed ammette una soluzione unica.

Possiamo aggiungere la seguente osservazione. Come è noto, il valore dell'integrale del Lebesgue di una funzione, data su un intervallo o semplicemente su un insieme misurabile, è indipendente dai valori che essa funzione assume su un insieme di misura nulla; altrettanto quindi potrà dirsi dell'integrale alla Denjoy, nel quale i valori della funzione da integrare intervengono solo a traverso l'integrale del Lebesgue. Ne viene che il calcolo della funzione primitiva, quando sia soddisfatta la condizione relativa agli insiemi $E_{-\infty}$, $E_{+\infty}$, può eseguirsi anche se il valore del numero derivato che si considera non è conosciuto in un insieme di punti di misura nulla.

9. Abbiamo già osservato nell'introduzione che una funzione continua non è determinata, a meno di una costante, da un suo numero derivato, quando almeno uno degli insiemi $E_{-\infty}$, $E_{+\infty}$ contiene un insieme perfetto. Possiamo aggiungere che, pur essendo soddisfatta la condizione per $E_{-\infty}$ e $E_{+\infty}$ di non contenere alcun insieme perfetto, l'indeterminazione della primitiva sussiste se il numero derivato non è conosciuto in un insieme I di misura non nulla. Ed infatti, detto P un insieme perfetto contenuto in I e

[1] Cfr. la mia Nota *Sulla potenza di alcuni insiemi*, che apparirà fra breve nel « Giornale di matematiche del Battaglini ».

di misura non nulla (1), indichiamo con $m(x)$ la misura della porzione di P compresa in (a, x). Questa funzione $m(x)$ è continua e non costante su tutto (a, b), ha numeri derivati in modulo non superiori ad 1, ed ha derivata nulla in tutti i punti non appartenenti a P; la funzione $f(x) + m(x)$ ha, pertanto, in tutti i punti non appartenenti a P ed *a fortiori* in tutti quelli non appartenenti ad I, gli stessi numeri derivati della $f(x)$; essa, inoltre, ha numeri derivati infiniti solo là ove sono infiniti (e di segno uguale a quello dei suoi) i numeri corrispondenti della $f(x)$.

Tenendo presente quanto si è detto al numero precedente, si può concludere con la proposizione enunciata alla fine dell'introduzione.

Osserviamo, da ultimo, che se l'insieme E_∞, dei punti che appartengono a $E_{-\infty}$ o a $E_{+\infty}$, contiene un insieme perfetto, altrettanto avviene di almeno uno dei due $E_{-\infty}$, $E_{+\infty}$. Ed infatti, considerando ad es. il numero derivato superiore destro ed ammesso che $E_{+\infty}$ non contenga insiemi perfetti, per la proposizione enunciata al principio del n. 8, possiamo affermare che su ogni insieme perfetto appartenente a E_∞ esiste sempre almeno una porzione tutta appartenente ad $E_{-\infty}$ (2).

Petrografia. — *Osservazioni sulle lave leucitiche del vulcano di Roccamonfina*. Nota di VENTURINO SABATINI, presentata dal Socio C. VIOLA.

Una rapida gita al vulcano di Roccamonfina e un breve esame del materiale raccolto mi permisero di stabilire taluni fatti interessanti.

Lo *sperone*, ritenuto una lava speciale dei monti Laziali dai primi che lo studiarono senza averlo mai riconosciuto altrove, può apparire in tutte le regioni eruttive. Questo fatto si sarebbe potuto dedurre quando lo Struever ritenne che lo sperone fosse dovuto all'azione delle emanazioni cloridriche sulla copertura delle lave grige (3), se tale opinione avesse avuto un qualche fondamento. Ma ventitrè anni dopo, quando erano conosciuti i pirosseni verdi e gialli, ignorati all'epoca in cui scrisse lo Struever, dimostrai che questa roccia è l'effetto di un'alterazione immediata delle lave grige per addizione di soda nella costituzione dei pirosseni ordinarii al momento della loro con-

(1) È ben noto che la misura di un insieme di punti è uguale al limite superiore di quelle degli insiemi perfetti contenuti nell'insieme considerato.

(2) Aggiungiamo qui la seguente proposizione: « una funzione continua, per la quale nessuno dei due insiemi in cui i suoi numeri derivati destri (sinistri) diventano infiniti contenga un insieme perfetto, ammette quasi dappertutto derivata finita uguale a tali numeri derivati ».

(3) *Studî petrografici sul Lazio*. Mem. Lincei, 1877.