# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXIX.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

taria, già preesistente in Europa, vivente ordinariamente allo stato saprofitario nei terreni molto umidi e che può, quando trovi condizioni ed ospiti adatti, comportarsi anche parassiticamente. Estenderei volentieri, sia detto incidentalmente, questo modo di vedere anche alla *Blepharospora cambivora*.

Sarà bene, in ogni modo, tener d'occhio questa crittogama che, a giudicare dagli effetti prodotti sui lupini, sembra capace di produrre danni considerevoli quando trovi favorevoli condizioni d'ambiente, e principalmennte, come sembra, un eccesso di umidità nel terreno.

Come metodo di lotta non si può per ora che consigliare la distruzione delle piante infette, il risanamento, mediante opportuno drenaggio, del terreno e la disinfezione del medesimo col solfuro di carbonio o con la formalina. Sarà bene sostituire per alcuni anni la coltura del lupino con quella di altre piante erbacee presumibilmente refrattarie, come i cereali.

## Matematica. — *Armonica viciniore ad una funzione assegnata.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

### 1. — Generalità circa una classe di problemi di approssimazione. — Armonica viciniore in un campo a tre dimensioni.

Sia U(P) una funzione finita e continua dei punti di un campo S, a una o più dimensioni, intendendo incluso in S anche il relativo contorno. Sia d'altra parte $u$(P) una funzione, pure finita e continua in S, appartenente ad un certo tipo o, più generalmente, insieme di funzioni $\mathfrak{T}$.

Si è condotti naturalmente a proporsi la questione di caratterizzare, fra le funzioni dell'insieme $\mathfrak{T}$, quella (o quelle, se ve ne ha di più) che maggiormente si approssima *in media* alla data U(P), alludendosi con ciò alla circostanza che riesca minimo il divario globale fra U e $u$; ossia, in modo preciso, il così detto errore medio quadratico. Questo equivale ad esigere che riesca minimo l'integrale

$$\text{(1)} \qquad I = \int_S (U - u)^2 \, dS.$$

Per alcune categorie $\mathfrak{T}$ di funzioni, la questione si riporta subito a ordinarî problemi di massimo e minimo Tale il caso in cui le funzioni $u$ dell'insieme $\mathfrak{T}$ dipendono da un numero finito di parametri (variabili con continuità entro certi intorni). Nel caso più generale, in cui le $u$ dell'insieme $\mathfrak{T}$ dipendono punto per punto (intendo in modo non funzionale) da una o più funzioni arbitrarie e loro derivate fino ad un certo ordine, la questione rientra classicamente nell'àmbito del calcolo delle variazioni e si riconduce ad equazioni differenziali.

Non è più così, almeno in generale, quando le $u$ dell'insieme dipendono in modo noto ma funzionale da altre funzioni arbitrarie. I principî del calcolo delle variazioni sono ancora applicabili; ma la condizione che si annulli la variazione prima porta ad equazioni di natura più complessa, per es. integrali od integro-differenziali, di cui la teoria, in relazione al problema variazionale, è ben lungi dall'essere così progredita come lo è per i sistemi puramente differenziali. Ciò ebbe a rilevare in linea generale il prof. Fubini, indicando varî tipi di problemi di calcolo delle variazioni, che dànno luogo a equazioni funzionali [1].

Qui intendo unicamente occuparmi del *minimo di* I *nella ipotesi che* S *sia una porzione (finita) dell'ordinario spazio a tre dimensioni, limitata da un contorno* $\sigma$, *e che* $u$ *debba essere armonica* e continua anche al contorno, assieme con la sua derivata normale. La discussione riesce in tal caso esauriente, invocando noti teoremi esistenziali concernenti le funzioni biarmoniche: ne rimangono rigorosamente stabilite l'univoca esistenza dell'armonica *viciniore* $u$ e le sue relazioni colla funzione assegnata U. Quando si tratta in particolare di un campo sferico, si può ulteriormente ricondurre la determinazione della $u$ all'ordinario problema di Dirichlet, e quindi al calcolo dell'integrale di Poisson: vi si perviene profittando di eleganti e ormai ben noti accorgimenti che già furono introdotti dall'Almansi e dal Boggio.

## 2. — Specificazioni qualitative.

Supporremo che la superficie (o il complesso di superficie) $\sigma$, che costituisce il contorno di S, sia regolare o almeno costituito da un numero finito di porzioni regolari (ciascuna dotata di piano tangente e di curvature variabili con continuità).

Detto Q un punto generico di $\sigma$, $d\sigma$ un elemento circostante a Q, rappresenteremo con $r(P, Q)$ la distanza da Q a un punto generico P di S, e con $\mu(Q)$ una funzione dei punti di Q, ovunque finita, e, in ogni porzione regolare di $\sigma$, anche continua.

Ciò premesso, precisiamo la varietà $\mathfrak{V}$ di funzioni $u$, armoniche entro S, da prendere in considerazione. Nella natura delle cose è di richiedere che $\mathfrak{V}$ comprenda tutte le funzioni armoniche, regolari nel campo, le quali rimangono finite anche al contorno, con che ha certo un senso l'integrale I. Noi limiteremo la nostra indagine imponendo ancora alle $u$ una limitazione qua-

[1] *Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali* (Annali di matematica, serie III, tomo XX, 1913, pp. 217-245). Per l'equazione di Fredholm di seconda specie, già Hilbert aveva rilevato [cfr. *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig, Teubner, 1912, pp. XI e 28] che essa proviene da un problema di minimo risalente a Gauss.

litativa circa il comportamento al contorno, e precisamente che, ove si risguardi una $u$ (come è sempre lecito) quale potenziale di semplice strato e la si assuma quindi sotto la forma

$$u(\mathrm{P}) = \int_\sigma \frac{\mu(\mathrm{Q})}{r(\mathrm{P},\mathrm{Q})}\, d\sigma\,, \tag{2}$$

la densità $\mu(\mathrm{Q})$ sia una funzione finita e generalmente continua nel senso testè specificato. Notoriamente, quando il contorno $\sigma$ è ovunque regolare, allora la condizione addizionale concernente $\mu$ si esprime con eguale semplicità direttamente per $u$, equivalendo alla continuità della sua derivata normale al contorno.

3. — Variazione di I. - Trasformazione della condizione $\delta \mathrm{I} = 0$. - Residuo. - Eguaglianza dei valori medii. - Constatazione di minimo. - Corrispondente espressione di I.

Per passare da una generica $u$ dell'insieme $\mathfrak{T}$ ad altra funzione infinitamente vicina dello stesso insieme, basta evidentemente attribuire a $\mu$ un incremento $\delta\mu = \chi(\mathrm{Q})$ *completamente arbitrario*, beninteso sotto le stesse condizioni di continuità imposte a $\mu$. Si ha così

$$\delta u(\mathrm{P}) = \int_\sigma \frac{\chi}{r(\mathrm{P},\mathrm{Q})}\, d\sigma\,. \tag{3}$$

D'altra parte, dalla espressione (1) di I segue immediatamente, mettendo anche in evidenza il punto generico P del campo di integrazione,

$$\delta \mathrm{I} = -2 \int_\mathrm{S} \{ \mathrm{U}(\mathrm{P}) - u(\mathrm{P}) \}\, \delta u(\mathrm{P})\, d\mathrm{S}\,. \tag{4}$$

Perchè I riesca minimo, sarà intanto necessario che

$$\delta \mathrm{I} = 0\,.$$

Ove si introduca nella (4), per $\delta u(\mathrm{P})$, l'espressione (3), e si invertano le integrazioni (ciò che è certo permesso, perchè la funzione sotto il segno diviene infinita appena di prim'ordine), si ha

$$\delta \mathrm{I} = -2 \int_\sigma \chi(\mathrm{Q})\, d\sigma \int_\mathrm{S} \{ \mathrm{U}(\mathrm{P}) - u(\mathrm{P}) \} \frac{d\mathrm{S}}{r(\mathrm{P},\mathrm{Q})}\,.$$

Per l'arbitrarietà di $\chi(\mathrm{Q})$, la condizione $\delta \mathrm{I} = 0$ implica che si annulli il coefficiente della stessa $\chi(\mathrm{Q})$. Si ha quindi, *in ogni punto* Q *di* $\sigma$,

$$\int_\mathrm{S} \{ \mathrm{U}(\mathrm{P}) - u(\mathrm{P}) \} \frac{d\mathrm{S}}{r(\mathrm{P},\mathrm{Q})} = 0\,, \tag{5}$$

che è evidentemente una *condizione integrale per l'armonica viciniore* $u$, *equivalente a* $\delta I = 0$. Rileviamo subito che *la univoca determinazione di* $u$ *in base a questa equazione rientra in un problema generale già risoluto dal Lauricella* [1]. Per essere completo, riprenderò brevemente al § 5 le considerazioni del Lauricella con referenza al caso particolare che ci interessa. Intanto ritengo acquisita la proposizione esistenziale e passo a rilevare alcune proprietà generali delle armoniche viciniori.

Formiamo in principio *il residuo*

$$U(P) - u(P) = \nu(P), \tag{6}$$

risguardandolo come densità di una ipotetica distribuzione newtoniana entro S.

Il primo membro della (5) si presenta allora come il corrispondente potenziale in Q; e il fatto che esso si annulla in ogni punto del contorno $\sigma$ di S porta come necessaria conseguenza che esso sia ovunque nullo all'esterno. Di qua l'espressiva interpretazione meccanica: Il residuo spettante all'armonica viciniore dà luogo ad attrazione esterna nulla; in particolare, *condizione necessaria e sufficiente perchè la viciniore sia zero è che la funzione data* U, *attribuita quale densità ad* S, *lo renda corpo di attrazione esterna nulla.*

Osserviamo ora che, nella (4), $\delta u(P)$ designa un qualsiasi incremento (infinitesimo) di $u$, entro l'insieme $\mathfrak{S}$; attesa la linearità della (4) stessa, si può in sostanza risguardare $\delta u$ come una funzione armonica arbitraria. Così la $\delta I = 0$, ossia

$$\int_S \{ U(P) - u(P) \} \, \delta u(P) \, dS = 0 , \tag{5'}$$

si presenta come una proprietà integrale dell'armonica viciniore $u$, dotata di ragguardevole generalità.

Una prima conseguenza interessante si ha ponendovi $\delta u = 1$; se ne desume allora che *il valore medio della funzione assegnata* U *coincide necessariamente con quello dell'armonica viciniore.*

Il carattere quadratico della espressione di I assicura, come è ben noto, che, per $\delta I = 0$, si ha un minimo assoluto. Possiamo constatarlo formando materialmente la differenza fra l'integrale $I^*$, corrispondente ad una generica funzione armonica $u^*$, e l'integrale I formato colla viciniore. Dacchè

$$(U - u^*)^2 = \{ (U - u) + (u - u^*) \}^2 ,$$

ove si moltiplichi per $dS$ e si integri, si ha identicamente

$$I^* = I + \int_S (u - u^*)^2 \, dS + 2 \int (U - u)(u - u^*) \, dS .$$

[1] *Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna*, in questi Rendiconti, serie 5ª, vol. XX, 1° sem. 1911, pp. 99-107.

L'ultimo integrale è zero, in virtù della (5'), nella quale si prenda $\delta u = u - u^\star$. Risulta pertanto $I^\star \geq I$, l'eguaglianza potendo sussistere soltanto per $u^\star$ coincidente con $u$, c. d. d.

Dalla (5'), ponendovi $\delta u = u$, si ricava quest'altro corollario: Il valore minimo di I relativo all'armonica viciniore può ritenersi espresso, oltre che da (1), anche da

$$I = \int_S U(P) \{ U(P) - u(P) \} \, dS. \tag{7}$$

4. — Riduzione della (5') ad una equazione integrale di prima specie.

Introduciamo nella (5), al posto di $u(P)$, la sua espressione (2), avendo l'avvertenza di designare il punto corrente di integrazione con Q' e l'elemento superficiale circostante con $d\sigma'$, in modo da evitare ambiguità coll'altro punto Q, che compare nella (5) stessa. Ove si ponga

$$N(Q, Q') = \int_S \frac{dS}{r(P, Q)\, r(P, Q')}, \tag{8}$$

$$V(Q) = \int_S U(P) \frac{dS}{r(P, Q)}, \tag{9}$$

la (5) (con una inversione di integrazioni, qui pure perfettamente legittima) assume la forma tipica

$$\int_\sigma N(Q, Q')\, \mu(Q')\, d\sigma' = V(Q) \quad \text{(in ogni punto Q di } \sigma) \tag{10}$$

di equazione integrale lineare di prima specie nell'incognita densità $\mu(Q')$ dell'armonica viciniore $u$. Il secondo membro V(Q), da riguardarsi cognito a norma della (9), risulta dai valori superficiali del potenziale newtoniano che ha per densità, in ogni punto interno P, l'assegnata funzione U(P). Quanto al nucleo N, esso è manifestamente simmetrico, finito e continuo, ed è pur definito positivo, in quanto, per una qualsiasi funzione continua $\theta$ dei punti di $\sigma$, si ha necessariamente

$$\int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \, N(Q, Q')\, \theta(Q)\, \theta(Q') \geq 0,$$

l'eguaglianza potendo sussistere solo a patto che $\theta$ si annulli. Ciò risulta dall'osservare che, posto

$$\tau(P) = \int_\sigma \frac{\theta(Q)}{r(P, Q)}\, d\sigma,$$

il primo membro della precedente disuguaglianza, in base alla espressione (8) di N, può essere scritto

$$\int_S \tau^2 \, dS.$$

Il suo annullarsi richiede $\tau = 0$ in tutto il campo S e in particolare su $\sigma$, il che basta ad assicurare, per ben note proprietà dei potenziali di superficie, che anche $\theta(Q) = 0$, c. d. d.

### 5. — Riduzione ad un problema biarmonico. — Verificazione della soluzione.

La determinazione della $u$, e, per essa, della densità $\mu$, si è fatta dipendere dalla equazione integrale (10). Ma il problema non si può con ciò risguardare risoluto, poichè, allo stato attuale della teoria, bisognerebbe far capo alla condizione necessaria e sufficiente di Picard-Lauricella, la quale presuppone la conoscenza delle autofunzioni e degli autovalori del nucleo: circostanza questa che, almeno in generale, non si può certo ritenere acquisita per il nostro $N(Q, Q')$.

Giova pertanto riprendere la equazione caratteristica (5), completando la discussione per altra via. Cominciamo col generalizzare la posizione (9), riferendola ad un punto qualunque P′ dello spazio (sia interno che esterno ad S, od anche sopra $\sigma$). Accanto a questo potenziale di volume

$$V(P') = \int_S U(P) \frac{dS}{r(P,P')}, \tag{10}$$

che si può risguardare assegnato assieme con U, introduciamo l'analogo, avente per densità l'incognita viciniore $u$,

$$v(P') = \int_S u(P) \frac{dS}{r(P,P')}. \tag{11}$$

La (5) può così essere scritta

$$v(Q) = V(Q) \quad (\text{sopra } \sigma). \tag{5''}$$

Si tratta di due potenziali di masse distribuite entro $\sigma$, i quali coincidono in superficie. Ciò implica coincidenza in tutto il campo *esterno*. Ne discende in particolare che coincideranno le derivate secondo una direzione generica $n$, $\frac{dv}{dn}$, $\frac{dV}{dn}$, purchè prese dall'esterno, anche nei punti di $\sigma$. Siccome tali derivate non subiscono discontinuità attraverso $\sigma$, è indifferente di considerare i valori limiti dall'esterno o dall'interno, e si può quindi, pensando per es. a questi ultimi, e attribuendo a $n$ il significato di direzione normale vòlta all'interno, associare a (5″) la sua necessaria conseguenza

$$\left(\frac{dv}{dn}\right)_Q = \left(\frac{dV}{dn}\right)_Q \quad (\text{sopra } \sigma). \tag{5'''}$$

Limitiamo oramai la considerazione dell'ausiliario potenziale $v$ al campo interno S. Esso verifica in tale campo l'equazione di Poisson

$$\Delta_2 v = -4\pi u, \tag{12}$$

ed è quindi una funzione *biarmonica* ($\Delta_4 v = 0$), essendo armonica $u$. Al contorno si conoscono, in base alle (5″) e (5‴), i valori della funzione e quelli della sua derivata normale. La $v$ ne rimane univocamente determinata. Ciò risulta con tutto rigore dalle ricerche di Fredholm e di Lauricella. Quest'ultimo ha infatti ricondotto la effettiva determinazione di $v$ [1] ad un sistema di equazioni integrali di seconda specie, per cui si trovano soddisfatte le condizioni di univoca risolubilità del Fredholm.

Trovata $v$, si ha $u$ dalla (12).

Verificazione. — È facile riconoscere *a posteriori* che la $u$ così definita è effettivamente l'armonica viciniore. Partiamo all'uopo dalla nota formula che esprime una generica funzione $v$ dei punti di S (finita e continua assieme alle sue derivate prime e seconde) mediante il $\Delta_2 v$ dei punti di S e i valori superficiali di $v$ e di $\frac{dv}{dn}$. Applicandola alla nostra $v$, in base alle (12), (5″) e (5‴), potremo scrivere

$$v(\mathrm{P}') = \int_{\mathrm{S}} u(\mathrm{P}) \frac{d\mathrm{S}}{r(\mathrm{P},\mathrm{P}')} + \mathrm{W}(\mathrm{P}'),$$

avendo posto per brevità

$$\mathrm{W}(\mathrm{P}') = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left\{ \mathrm{V}(\mathrm{Q}) \frac{d}{dn} \frac{1}{r(\mathrm{Q},\mathrm{P}')} - \left(\frac{d\mathrm{V}}{dn}\right)_{\mathrm{Q}} \frac{1}{r(\mathrm{Q},\mathrm{P}')} \right\} d\sigma .$$

Ora notiamo che (intendendo P′ entro S) V(Q) e $\frac{1}{r(\mathrm{Q},\mathrm{P}')}$ considerate come funzioni dei punti Q *esterni* o appartenenti a $\sigma$, sono entrambe armoniche e regolari, e si annullano debitamente all'$\infty$. Perciò il teorema di Green, applicato a queste due funzioni nella regione esterna a $\sigma$, ci assicura che $\mathrm{W}(\mathrm{P}') = 0$. Rimane pertanto

$$v(\mathrm{P}') = \int_{\mathrm{S}} u(\mathrm{P}) \frac{d\mathrm{S}}{r(\mathrm{P},\mathrm{P}')},$$

e così, in primo luogo, si ritrova la (11). Dopo ciò, riflettendo che la $v$ verifica per costruzione la (5″), si è condotti alla voluta conclusione che l'armonica $u$ fornita dalla (12) soddisfa alla originaria (5), equivalente a sua volta a $\delta \mathrm{I} = 0$, c. d. d.

## 6. — Campo sferico.

Sia R il raggio, e $\varrho$ rappresenti la distanza di un generico punto P dal centro O. Per la costruzione della biarmonica $v$, giova servirsi anzitutto

[1] *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta^4 \mathrm{V} = 0$, in questi Rendic., serie 5ª, vol. XVI, 2° sem. 1907, pp. 373-383.

del lemma di Almansi [1], secondo cui ogni funzione biarmonica $v$, regolare entro la sfera S, si può mettere sotto la forma

$$v = (R^2 - \varrho^2)\,\varphi + \psi, \tag{13}$$

essendo $\varphi$ e $\psi$ due funzioni armoniche (pure regolari entro la sfera).

In ogni punto Q del contorno $\sigma$, $v$ si riduce all'addendo $\psi$, talchè la (5″) fa conoscere direttamente i valori superficiali V(Q) di $\psi$, e la sua completa determinazione dipenderebbe dall'ordinario problema di Dirichlet. Ma il seguito della discussione mostrerà che non è necessaria per il nostro scopo l'esplicita valutazione di $\psi$. Deriviamo intanto la (13) rispetto a $\varrho$ in un punto interno, e poniamo, a derivazione eseguita, $\varrho = R$, riferendoci in conformità a un generico punto Q di $\sigma$. Notando che, in Q, $\frac{d}{d\varrho} = -\frac{d}{dn}$, e badando alla (5‴), risulta

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = -2R\varphi(Q) + \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}, \tag{14}$$

che somministra i valori al contorno della seconda funzione armonica $\varphi$, però con intervento della $\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}$. Ma è possibile di liberarsene. Ed ecco come.

Ricordiamo che V(P′) è funzione armonica del campo esterno a $\sigma$, mentre la $\psi$ è stata or ora caratterizzata come l'armonica del campo interno che prende i medesimi valori superficiali. Ciò non implica naturalmente che si raccordino anche i valori delle rispettive derivate normali; ma, per la speciale forma sferica del campo, esiste fra questi valori una relazione locale assai semplice, rilevata dal Boggio [2]. Questa relazione, per le nostre $\psi$ e V, può essere scritta

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = -\frac{1}{R}\,V(Q).$$

La (14) assume così l'aspetto

$$\varphi(Q) = -\frac{1}{R^2}\left(R\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \tfrac{1}{2}V\right)_Q, \tag{14'}$$

col secondo membro dipendente soltanto da V e sua derivata normale.

Nota $\varphi$ entro il campo S, il che implicherebbe ancora una volta risoluzione dell'ordinario problema di Dirichlet, dalle (12) e (13) si ha $u$ sotto

[1] *Sulla deformazione della sfera elastica*, Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, tomo XLVII, 1897, pag. 111.

[2] Cfr. *Induzione prodotta da un campo magnetico qualunque sopra una sfera isotropa*, Rend. del R. Istituto lombardo, vol. XXXVII, 1914, pag. 125.

la forma

$$u = \frac{1}{\pi}\left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \tfrac{3}{2}\varphi\right). \tag{15}$$

Facciamo un ultimo passo, esprimendo i valori superficiali di $u$ mediante V. All'uopo partiamoci dall'osservare che

$$\varphi^\star = -\frac{1}{R^2}\left(\varrho \frac{\partial V}{\partial \varrho} + \tfrac{1}{2} V\right) \tag{16}$$

è, al pari di V, una funzione armonica e regolare nel campo esterno alla sfera (che si comporta all'$\infty$ come un potenziale). In superficie ($\varrho = R$), si ha, a norma della (14'), $\varphi = \varphi^\star$. Applicando un'altra volta la ricordata formula del Boggio, si può esprimere il valore limite (dall'interno) di $\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$, in un generico punto Q della superficie sferica $\sigma$, mediante il valore limite (dall'esterno) di $\frac{\partial \varphi^\star}{\partial \varrho}$, e si ha precisamente

$$\frac{\partial \varphi^\star}{\partial \varrho} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = -\frac{1}{R}\varphi^\star,$$

ossia, in base alla (16), e, ben si intende, ponendo $\varrho = R$ a derivazione eseguita,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{1}{R^3}\left\{R^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\right)_e + \tfrac{5}{2} R \frac{\partial V}{\partial \varrho} + \tfrac{1}{2} V\right\}:$$

per maggior chiarezza ho scritto $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\right)_e$, anzichè semplicemente $\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}$, onde mettere in evidenza che si devono considerare i valori limiti dall'esterno. (Per V e $\frac{\partial V}{\partial \varrho}$ è indifferente, attesa la continuità).

Facendo nella (15) $\varrho = R$ e portandovi al posto di $\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$ l'espressione testè ricavata e, al posto di $\varphi$, la (14'), abbiamo infine

$$u(Q) = \frac{1}{\pi R^2}\left\{R^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\right)_e + R\frac{\partial V}{\partial \varrho} - \tfrac{1}{4} V\right\}_Q \quad \text{(sopra } \sigma). \tag{17}$$

Riassumendo: per determinare l'armonica viciniore $u$, tutto è ridotto a procurarsi in primo luogo il potenziale newtoniano V che ha per densità l'assegnata funzione U. Mediante i valori di V e delle sue derivate normali prima e seconda sulla superficie sferica $\sigma$, si forma il secondo membro della (17), e si ricavano così i valori superficiali di $u$. Per avere $u$ anche all'interno basta quindi applicare *una sola volta* la nota formula di Poisson.

Come controllo dell'esattezza materiale di questi passaggi di calcolo, possiamo verificare che, per $U = 1$, l'armonica viciniore $u$ si riduce anche essa all'unità, come risulta dalla sua stessa definizione. All'uopo si nota che il potenziale esterno V di una sfera omogenea, di raggio R e densità 1, vale $\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot 1/\varrho$. Si ha quindi, per $\varrho = R$,

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^2 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial \varrho} = -\tfrac{4}{3}\pi R \quad , \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\right)_e = \tfrac{8}{3}\pi ,$$

con che il secondo membro della (17) diviene effettivamente $= 1$, e la $u$, essendo 1 in superficie, si conserva tale anche all'interno.

Si potrebbe verificare più generalmente (ricorrendo per es. allo sviluppo in serie di funzioni sferiche) che $u = U$ ogniqualvolta U è armonica.

## Chimica agraria. — *L'azoto del gruppo cianico nella concimazione* (1). Nota di R. Perotti, presentata dal Socio G. Cuboni.

Contributo alla determinazione del meccanismo d'azione dell'azoto cianico nella nutrizione vegetale e delle *condizioni* della sua utilizzazione — a partire da prodotti puri ed in relazione ai miei precedenti lavori sulla calciocianamide (2) — sono gli studi, di cui è oggetto la presente Nota.

In queste ricerche mi valsi del cianuro potassico, recentemente preparato dall'acido cianidrico gassoso e dalla potassa in soluzione alcoolica, che, al controllo di purezza, mi fornì i seguenti dati:

cm. 25 di soluzione all' 1 ‰ del prodotto, precipitarono

| | | | |
|---|---|---|---|
| cmc. 3,72 di $AgNO_3 \frac{N}{10}$ . . . . . | KCN ‰ | gr. | 0,96 |

cmc. 25 della soluzione medesima, precipitarono

| | | | |
|---|---|---|---|
| cmc. 3.74 di $AgNO_3 \frac{N}{10}$ . . . . . | " | " | 0,97 |
| Media . . . . . | KCN ‰ | gr. | 0,965 |
| Umidità . . . . . | " | " | 0,026 |
| Impurezze e perdite ($K_2CO_3$) . | " | " | 0,009 |
| Totale . . . | | gr. | 1,000 |

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio chimico e batteriologico della R. Stazione di patologia vegetale di Roma.

(2) Cfr. per i miei diciotto lavori sulla calciocianamide: Perotti R, *Alcuni capisaldi verso la naturale evoluzione dell'azoto cianamidico nel terreno e delle relative applicazioni nella concimazione agricola*, Staz. sperim. agrarie; 42 (1909), pag. 521.