ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Matematica. — *Sui contatti delle curve di diramazione per una funzione algebrica di due variabili.* Nota del dott. OSCAR CHISINI, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES.

1. In una precedente Nota, intitolata *Sugli incroci delle curve di diramazione di una funzione algebrica di due variabili* (1), ho dimostrato che le due sostituzioni A e B, relative a due parti a e b della curva di diramazione per una funzione algebrica $z(xy)$ nell'intorno di un punto $P_0 = (x_0 y_0)$, sono fra loro permutabili quando le a e b passino per P_0 semplicemente e senza contatto. Da ciò segue che, ove le due sostituzioni A e B non siano permutabili, le curve a e b dovranno avere in P_0 un certo contatto. In questa Nota mi propongo appunto di studiare questo caso, e precisamente di far vedere che, *se nel punto* P_0 *le due curve di diramazione* a e b *passano semplicemente e con un contatto* r*-punto, le sostituzioni* A *e* B *ad esse relative risultano permutabili con* $(BA)^r$, *onde, date* A *e* B, *resta determinato l'ordine* r *di contatto.*

E, in fine, citerò due esempî che, per brevità di spazio, non è possibile sviluppare, i quali valgono tuttavia a convalidare l'asserto ed a chiarirne il valore.

2. Il procedimento dimostrativo, che si segue in questa Nota, è del tutto analogo a quello seguìto in quella sopra citata.

Sia $P_0 = (0\,0)$ il punto del piano (xy) per il quale passano le due curve di diramazione (o rami di una medesima curva) a e b, aventi un contatto r-punto ($r \geq 2$), e si consideri, nello spazio a quattro dimensioni $(x_1\, x_2\, y_1\, y_2)$ dato dalle parti reali ed immaginarie delle variabili x ed y, il punto $O = (0\,0\,0\,0)$, corrispondente di P_0, e le due superficie Δ_a e Δ_b, omologhe delle curve a e b. Anche qui considereremo, dello spazio $(x_1\, x_2\, y_1\, y_2)$, soltanto un intorno del punto O, cioè la regione interna a un'ipersfera Ω

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = h^2\,,$$

il cui raggio h è definito dalla circostanza che entro a questa non si devono avere altre falde, fuori di Δ_a e Δ_b, della superficie corrispondente alla curva di diramazione; e le due falde devono restare distinte e senza altri punti comuni all'infuori di O.

Si consideri anche qui una linea chiusa L_a, appartenente alla Δ_a, la quale ne avvolga il punto O, e si seghi con uno spazio a tre dimensioni contenente la L_a: questo intersecherà Δ_b secondo una linea L_b, e occorre

(1) Questi Rendiconti, pag. 127.

vedere quale sia la posizione reciproca delle due curve L_a ed L_b. Per arrivare a riconoscere tale posizione reciproca, supponiamo che le curve a e b siano date dalle due equazioni

$$y = 0$$
$$y = x^r:$$

a questa ipotesi ci si può ricondurre mediante una trasformazione del piano (xy) regolare nell'intorno del punto $P_0 = (0\,0)$.

Infatti siano

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots c_{r-1} x^{r-1} + a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \cdots$$
$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots c_{r-1} x^{r-1} + b_r x^r + b_{r+1} x^{r+1} + \cdots$$

(dove $a_r \neq b_r$) gli sviluppi che dànno i due rami a e b. Si ponga anzitutto

$$\begin{cases} y_1 = y - c_1 x - c_2 x^2 - \cdots - a_r x^r - a_{r+1} x^{r+1} - \cdots \\ x_1 = x \end{cases}$$

allora i due rami divengono

$$y_1 = 0$$
$$y_1 = d_r x_1^r + d_{r+1} x_1^{r+1} + \cdots$$

si ponga poi

$$\begin{cases} x_2^r = d_r x_1^r + d_{r+1} x_1^{r+1} + \cdots \\ y_2 = y_1 \ (^1) \end{cases}$$

e i due rami divengono appunto

$$y_2 = 0$$
$$y_2 = x_2^r.$$

Ciò posto, si seghino le due falde con la quadrica

$$\lambda(y_1 + y_2) = x_1^2 + x_2^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

(dove λ verrà determinato poi in guisa che le sezioni restino interne alla ipersfera Ω) e si proiettino le intersezioni dal punto all'infinito dell'asse y_2 nello spazio a tre dimensioni $y_2 = 0$.

La falda relativa alla retta $y = 0$, essendo data dal piano

$$y_1 = y_2 = 0\,,$$

(1) Questa trasformazione è effettivamente regolare, perchè dà x_2 funzione biunivoca di x_1 nell'intorno di $x_1 = 0$.

viene segata dalla quadrica secondo un cerchio che si proietta nel cerchio L_a di equazioni

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 0. \tag{2}$$

Invece la falda relativa alla curva $y = x^r$ resta definita dalle equazioni

$$\begin{cases} (3) \quad y_1 = x_1^r - \binom{r}{2} x^{r-2} x_2^2 + \binom{r}{4} x_1^{r-4} x_2^4 + \cdots \\ (4) \quad y_2 = \binom{r}{1} x_1^{r-1} x_2 - \binom{r}{3} x_1^{r-3} x_2^3 + \binom{r}{5} x_1^{r-5} x_2^5 \ldots \end{cases}$$

e la curva, sezione con la quadrica, viene proiettata nella curva L_b di equazioni

$$(5) \quad \begin{cases} \lambda \left[x_1^r - \binom{r}{2} x_1^{r-2} x_2^2 + \binom{r}{4} x_1^{r-4} x_2^4 - \cdots \right] + \\ \quad + \lambda \left[\binom{r}{1} x_1^{r-1} x_2 - \binom{r}{3} x_1^{r-3} x_2^3 + \binom{r}{5} x_1^{r-5} x_2^5 - \cdots \right] = \\ \qquad = x_1^2 + x_2^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \\ y_1 = x_1^r - \binom{r}{2} x_1^{r-2} x_2^2 + \binom{r}{4} x_1^{r-4} x_2^4 - \cdots \end{cases}$$

Ci occorre ora far vedere che la linea L_b è una linea chiusa che avvolge a spirale il cerchio L_a, precisamente r volte. A tale oggetto osserviamo anzitutto che la proiezione di L_b sul piano $y_1 = 0$ è la curva

$$\lambda \left[x_1^r - \binom{r}{2} x_1^{r-2} x_2^2 + \binom{r}{4} x_1^{r-4} x_2^4 - \cdots \right] +$$
$$+ \lambda \left[\binom{r}{1} x_1^{r-1} x_2 - \binom{r}{3} x_1^{r-3} x_2^3 + \cdots \right] = x_1^2 + x_2^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2;$$

questa, per λ abbastanza piccolo, riesce composta di un ramo prossimo quanto si vuole al cerchio L_a ed intersecato in due punti dalle rette per il punto H ($x_1 = x_2 = 0$), e di altri eventuali rami i quali tuttavia risultano quanto si voglia lontani dal detto cerchio e quindi non vengono ad appartenere all'intorno Ω considerato.

In secondo luogo si osservi che l'equazione

$$\binom{r}{1} x_1^{r-1} x_2 - \binom{r}{3} x_1^{r-3} x_2^3 + \binom{r}{5} x_1^{r-5} x_2^5 \cdots = 0$$

rappresenta l'insieme delle r rette $m_1\, m_2 \ldots.\, m_r$ passanti per il punto

$H = (0\,0)$ e per i vertici di un poligono regolare di $2r$ lati di centro H: basta infatti confrontare l'equazione suddetta con l'equazione

$$(x_1 + i\,x_2)^r = \pm 1$$

che dà le radici $2r$-esime dell'unità.

Similmente l'equazione

$$x_1^r - \binom{r}{2} x_1^{r-2}\, x_2^2 + \binom{r}{4} x_1^{r-4}\, x_2^4 \cdots = 1$$

rappresenta ancora r rette, $n_1\, n_2 \ldots n_r$, passanti per l'origine H, e che si riducono alle precedenti mediante una rotazione di $\frac{1}{r}\frac{\pi}{2}$, come si vede confrontando con l'equazione

$$(x_1 + i\,x_2)^r = \pm i.$$

Ciò posto, è facile riconoscere che la curva L_b incontra il piano $y_1 = 0$ in $2r$ punti, $R_1\, R_2 \ldots R_{2r}$, i quali appartengono alle rette $n_1\, n_2 \ldots n_r$, e che questi risultano alternativamente uno interno e l'altro esterno al cerchio L_a. Infatti, in primo luogo questi punti si ottengono facendo sistema delle due equazioni (5) e della $y_1 = 0$, la quale, unita alla seconda delle (5), dà appunto

$$x_1^r - \binom{r}{2} x_1^{r-2}\, x^2 + \binom{r}{4} x_1^{r-4}\, x_2^4 - \cdots = 0,$$

sicchè essi appaiono appartenere alle rette n; inoltre, poichè le rette n ed m si alternano, nelle $2r$ regioni angolari determinate dalle m è alternativamente positiva e negativa la funzione

$$y_2 = \binom{r}{1} x_1^{r-1}\, x_2 - \binom{r}{3} x_1^{r-3}\, x_2^3 + \binom{r}{5} x_1^{r-5}\, x_2^5 - \cdots$$

che si annulla sulle rette m; e poichè, in virtù della prima delle (5), in un punto R si ha

$$\lambda\, y_2 = x_1^2 + x_2^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

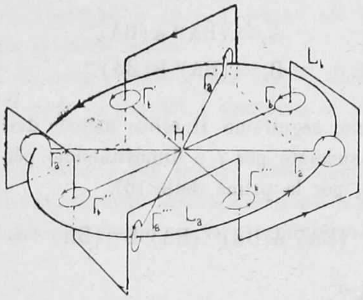
secondochè $\lambda\, y_2$ è positivo o negativo, questo punto sarà esterno o interno al cerchio L_a; e da ciò segue il nostro enunciato.

Si osservi, ora, che entrambe le curve L_a ed L_b restano invariate per una rotazione dello spazio, intorno all'asse y_1, di ampiezza $\frac{2\pi}{r}$.

Infine giova avvertire che il verso elicoidale, secondo cui L_b avvolge L_a, dipende dal segno di λ, e che d'altra parte si può deformare con continuità L_b in modo da invertire tale verso, il quale dunque potrà essere assunto ad arbitrio.

Riconosciuta così la reciproca posizione delle linee chiuse L_a ed L_b, veniamo all'esame delle *sostituzioni* corrispondenti, per dimostrare che esse sono *permutabili col loro prodotto elevato alla* r-esima *potenza*.

Riferendoci alla figura (dove la linea L_b è ridotta ad una spezzata avvolgente appunto il cerchio L_a $r = 4$ volte), sia Γ_a un cappio uscente da H



e avvolgente L_a (e quindi Δ_a) nel senso indicato dalla freccia, e sia Γ_b un altro cappio, giacente nel piano orizzontale $y_1 = 0$ cui appartiene il cerchio L_a, il quale avvolga, nel senso indicato, la linea L_b (e quindi Δ_b). Ruotiamo il piano verticale, che contiene la Γ_a, di un angolo $\frac{2\pi}{r}$ intorno all'asse del cerchio L_a, sicchè il cappio Γ_a venga portato nel cappio Γ'_a. Indicando con A e B le sostituzioni relative ai cappî Γ_a e Γ_b, e con A_1 quella relativa a Γ'_a, si ha

$$A_1 = B A B^{-1}.$$

Si ruoti ora dello stesso angolo $\frac{2\pi}{r}$, e sempre intorno all'asse del cerchio L_a, il cappio Γ_b, portandolo in un nuovo cappio Γ'_b, avvolgente ancora L_b: avremo pure che la sostituzione relativa al nuovo cappio Γ'_b vale

$$B_1 = A_1 B A_1^{-1}.$$

Indicando in generale con A_i e B_i le sostituzioni relative ai cappî $\Gamma_a^{(i)}$ e $\Gamma_b^{(i)}$ trasformati di Γ_a e Γ_b mediante la rotazione di ampiezza $i\frac{2\pi}{r}$ intorno all'asse del cerchio L_a, avremo

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} A_{i+1} &= B_i A_i B_i^{-1} \\ B_{i+1} &= A_{i+1} B_i A_{i+1}^{-1}. \end{aligned}\right.$$

Ora osserviamo che A_1 è la trasformata di A mediante il prodotto BA: infatti

$$(BA)\,A\,(BA)^{-1} = B\,A\,A\,A^{-1}\,B^{-1} = B\,A\,B^{-1},$$

e così pure è B_1 la trasformata di B mediante il prodotto BA: infatti

$$B_1 = A_1\,BA_1^{-1} = (B\,A\,B^{-1})\,B(BA^{-1}\,B^{-1}) = (BA)\,B(A^{-1}\,B^{-1}) = (BA)\,B(BA)^{-1}.$$

Vediamo ora che è in generale:

$$A_i = (BA)^i\,A\,(BA)^{-i}$$
$$B_i = (BA)^i\,B\,(BA)^{-i}.$$

Per dimostrare ciò, seguiremo il solito metodo dell'induzione completa, ammettendo vero l'enunciato per i e dimostrandolo per $i+1$.

Avremo dunque, per la prima delle (6),

$$A_{i+1} = (BA)^i B(BA)^{-i}\,(BA)^i\,A(BA)^{-i}\,(BA)^i\,B^{-1}\,(BA)^{-i} = (BA)^i\,BAB^{-1}\,(BA)^{-i},$$

e, poichè $A = A\,A\,A^{-1}$,

$$A_{i+1} = (BA)^i\,(BA)\,A(A^{-1}\,B^{-1})\,(BA)^{-i} = (BA)^{i+1}\,A(BA)^{-i-1}.$$

Passando alla B_{i+1}, per la seconda delle (6), avremo

$$\begin{aligned} B_{i+1} &= (BA)^{i+1}\,A(BA)^{-i-1}\,(BA)^i\,B(BA)^{-i}\,(BA)^{i+1}\,A^{-1}\,(BA)^{-i-1} = \\ &= (BA)^{i+1}\,A(BA)^{-1}\,B(BA)\,A^{-1}\,(BA)^{-i-1} \\ &= (BA)^{i+1}\,A\,A^{-1}\,B^{-1}\,B\,B\,A\,A^{-1}\,(BA)^{-i-1} \\ &= (BA)^{i+1}\,B(BA)^{-i-1}. \end{aligned}$$

Ora, infine, essendo

$$A_r = A\ ,\ B_r = B,$$

possiamo concludere

$$A = (BA)^r\,A(BA)^{-r}$$
$$B = (BA)^r\,B(BA)^{-r}:$$

cioè A e B sono permutabili con la $(BA)^r$; che è quanto avevamo enunciato.

4. Esempi. — Si consideri, nell'intorno del punto $P_0 = (x = 0\ ,\ y = 0)$, la funzione z definita prima dall'equazione

$$f = z^{\nu+1} + xz^\nu + y = 0$$

e poi dalla

$$f = y\,(x + y + z) + z^\nu = 0.$$

In entrambi i casi si hanno due curve di diramazione passanti per P_0; ma nel primo è

$$A = (z_1 z_2 \ldots z_\nu) \,,\; B = (z_1 z_{\nu+1}) \,,\; BA = (z_1 z_2 \ldots z_{\nu+1}) \,,$$

e nel secondo

$$A = (z_1 z_2 \ldots z_\nu) \,,\; B = (z_1 z_\nu) \,,\; BA = (z_1 z_2 \ldots z_{\nu-1}) \,.$$

Si deduce che le due curve di diramazione debbono avere nel primo caso un contatto $(\nu + 1)$-punto, e $(\nu - 1)$-punto nel secondo, cosa che si verifica analiticamente in modo facile.

E vale la pena di notare come i due casi si distinguano da ciò, che nel primo il punto $P = (x = y = 0)$ è semplice, e nel secondo è doppio per la superficie

Ed è infine chiaro come i due esempî siano caratteristici del caso in cui si ha contatto di una curva di diramazione relativa a un ciclo d'ordine ν, con un'altra relativa ad uno scambio non permutabile con esso.

Geodesia. — *Nuova soluzione del problema inverso del trasporto delle coordinate lungo una geodetica.* Nota di CORRADINO MINEO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Cristallografia. — *Della forma cristallina della nitro-di-cloro-acetanilide* (1),

$$\underset{1}{C_6H_2 . NO_2} . \underset{2}{Cl} . \underset{6}{Cl} . \underset{5}{NH(C_2H_3O)} .$$

Nota di MARIA DE ANGELIS, presentata dal Socio ARTINI.

P. fus. $= 129°,8$.

La sostanza fu preparata dal prof. Körner clorurando con ipoclorito di calcio la meta-nitro-anilina. Acetilando poi mediante ebullizione con anidride acetica la miscela di aniline così ottenuta, la nitro-di-cloro-acetanilide 1.2.6.5 si può separare per cristallizzazione frazionata da alcool dalle altre tre nitro-cloro-acetanilidi che si formano insieme con essa.

La sostanza è dimorfa: facendola cristallizzare per lenta evaporazione da solventi diversi, come alcool etilico, miscele di etere ed alcool, etere

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del Museo civico di storia naturale in Milano.