ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell'11 aprile 1920.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Idromeccanica. — *Sull'integrazione dell'equazione caratteristica dei piccoli moti ondosi in un canale di qualunque profondità.* III: *Perturbazione locale.* Nota III di U. Cisotti [1], presentata dal Socio T. Levi-Civita.

11. Conviene ora introdurre la profondità h del canale, profondità che si era assunta eguale a uno [n. 1]; basta alterare tutte le lunghezze nel rapporto da 1 a $\frac{1}{h}$. In tal modo, per la (10), si ha

$$\text{(19)} \qquad \mathrm{I}[\eta_0] = \frac{g}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_0(x_1) \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi(x_1 - x)}{4h}\, dx_1 .$$

12. Supponiamo che la perturbazione iniziale sia localizzata in un punto del pelo libero l o, più esattamente, in una porzione s molto piccola, assimilabile a un punto $(x = 0\,,\ y = h)$, in modo però che

$$a = \int_s \eta_0\, dx$$

abbia valore finito e determinato. Si ha allora, fuori di s,

$$\text{(20)} \qquad \eta_0 = \mathrm{I}^0[\eta_0] = 0,$$

[1] Note I e II in questi Rendiconti, pp. 131, 175.

mentre, per la (19),

$$\mathrm{I}[\eta_0] = \frac{ga}{2\pi} \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi x}{4h}. \tag{21}$$

Ne segue che il primo termine dello sviluppo (14) di η in serie è

$$\mathrm{T}_1 = \frac{g\,a\,t^2}{4\pi} \frac{d^2}{dx^2} \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi x}{4h} = \frac{\pi\, g\, a\, t^2}{8h^2} \frac{\mathrm{Ch}\,\frac{\pi x}{2h}}{\mathrm{Sh}^2 \frac{\pi x}{2h}}. \tag{22}$$

Esso coincide con l'espressione già trovata da Rayleigh [1].

Prendo ora in esame il secondo termine

$$\mathrm{T}_2 = \frac{t^4}{24} \frac{d^4}{dx^4} \mathrm{I}^2[\eta_0]. \tag{23}$$

Avendosi, per le (10) (19) e (21),

$$\mathrm{I}^2[\eta_0] = \frac{g^2 a}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi x_1}{4h} \cdot \log \mathrm{Cth}^2 \frac{\pi(x_1 - x)}{4h}\, dx_1,$$

si ha pure, integrando per parti e applicando facili riduzioni,

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathrm{I}^2[\eta_0] = \frac{g^2 a}{2\pi h\, \mathrm{Sh}\,\frac{\pi x}{2h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} \log \frac{\mathrm{Sh}\,\frac{\pi(x - x_1)}{2h}}{\mathrm{Sh}\,\frac{\pi x_1}{2h}}\, dx_1,$$

per tutti i valori di x esterni ad un intorno, comunque piccolo, di $x = 0$. Risultando l'integrale del secondo membro

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} \log \frac{\mathrm{Sh}\,\frac{\pi(x - x_1)}{2h}}{\mathrm{Sh}\,\frac{\pi x_1}{2h}}\, dx_1 = -\frac{\pi x}{h},$$

si ottiene in definitiva

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathrm{I}^2[\eta_0] = -\frac{g^2 a\, x}{2h^2\, \mathrm{Sh}\,\frac{\pi x}{2h}};$$

[1] Rayleigh, *On the Instantaneous Propagation of Disturbance in a Dispersive Medium exemplified by Wawes on Water deep and shallow* [Philosophical Magazine, vol. XVIII (1909), pag. 4, formula (12)].

sostituendo in (23), si ottiene

$$T_2 = -\frac{g^2 a t^4}{48 h^2} \frac{d^2}{dx^2} \frac{x}{\mathrm{Sh}\frac{\pi x}{2h}}$$

$$(24) \qquad = \frac{\pi g^2 a t^4}{48 h^3} \left\{ \frac{\mathrm{Ch}\frac{\pi x}{2h}}{\mathrm{Sh}^2\frac{\pi x}{2h}} - \frac{\pi}{4h} \frac{x}{\mathrm{Sh}\frac{\pi x}{2h}} \left(1 + \frac{2}{\mathrm{Sh}^2\frac{\pi x}{2h}} \right) \right\}.$$

Per la (22) si ha quindi, per la somma dei primi due termini dello sviluppo (14) di η, l'espressione seguente:

$$(25) \quad T_1 + T_2 = \frac{\pi g a t^2}{8h^2} \left\{ 1 + \frac{gt^2}{6h} \right\} \frac{\mathrm{Ch}\frac{\pi x}{2h}}{\mathrm{Sh}^2\frac{\pi x}{2h}} - \frac{\pi^2 g^2 a t^4}{192 h^4} \frac{x}{\mathrm{Sh}\frac{\pi x}{2h}} \left(1 + \frac{2}{\mathrm{Sh}^2\frac{\pi x}{2h}} \right).$$

13. Nel caso di un canale infinitamente profondo, si ha notoriamente [1], per η, lo sviluppo seguente:

$$(26) \qquad \eta = \frac{a}{\pi x} \left\{ \frac{gt^2}{2x} - \frac{1}{3 \cdot 5} \left(\frac{gt^2}{2x} \right)^3 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \left(\frac{gt^2}{2x} \right)^5 - \cdots \right\}.$$

Al primo termine di questa serie si riduce l'espressione (22) di T_1 quando se ne valuta il limite per $h = \infty$. Il limite di T_2 invece è nullo, come scende immediatamente dalla (24); ciò era da attendersi perchè T_2 contiene la quarta potenza di t, mentre nell'espressione (26) di η risulta mancante il termine corrispondente. Parmi notevole la circostanza che la presenza del fondo (quando h è finito) faccia sentire la sua influenza anche in questo termine. Comunque, l'espressione (25) di $T_1 + T_2$ fornisce, con un'approssimazione maggiore di quella ottenuta da Rayleigh, una valutazione dell'influenza del fondo nella propagazione della perturbazione ondosa.

14. Per esaurire la determinazione del moto (distribuzione delle velocità nei punti sottostanti al pelo libero, linee di corrente, ecc.), è necessario di conoscere la $f(t;z)$ nei punti z interni alla striscia $0 \leq y \leq 1$ [n.i 1-4]. Continuando a riferirci al caso tipico delle onde di emersione, per tale funzione vale lo sviluppo (1″)

$$f(t;z) = \sum_0^\infty{}^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} f_{2n+1}(z).$$

Corrispondentemente si ha, per la sua parte reale,

$$\varphi = \sum_0^\infty{}^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \varphi_{2n+1}.$$

[1] Cfr. ad es. Lamb, *Hydrodynamics* [Fourth Edition (1916), pag. 374].

Nei punti della retta $y = 1$, dev'essere [n. 6]

$$\varphi_{2n+1}(x) = \frac{g}{2\pi}\frac{d^2}{dx^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{2n-1}(x_1)\log \operatorname{Cth}^2\frac{\pi}{4}(x_1 - x)\,dx_1$$
$$= \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\,\mathrm{I}^n[\varphi_1];$$

per cui si ha

$$\varphi = \sum_0^\infty{}^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\,\mathrm{I}^n[\varphi_1]. \tag{27}$$

Per quanto è stato detto nei n.i 8-10, è assicurata la convergenza della serie precedente per ogni valore finito di t.

Una volta determinati i valori di φ per $y = 1$, basta applicare alla funzione $f(t;s)$ la formula (5) già applicata alla $f_{n+2}(s)$, e si ottiene

$$f(t;s) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t;x)\frac{dx}{\operatorname{Ch}\frac{\pi}{2}(x - s)}. \tag{28}$$

In tal modo risulta definita la f nei punti interni della striscia accennata, e con essa rimane risoluta la questione delle onde di emersione nei canali di qualunque profondità.

Mineralogia. — *Sulla cosiddetta idrocastorite dell'Elba* (1). Nota del dott. Probo Comucci, presentata dal Corrisp. F. Millosevich.

Sul minerale elbano indicato con il nome di idrocastorite e considerato come specie ben definita, già sono stati espressi dei dubbî specialmente da A. Manasse (2) e da G. D'Achiardi (3), i quali propendono per ritenerla come una stilbite microcristallina.

Ho creduto pertanto interessante d'intraprendere nuove ricerche sul minerale in parola, servendomi dello stesso materiale proveniente dalla cava Pisani (Fonte del Prete) a S. Piero in Campo (Elba), il cui studio condusse il compianto prof. Grattarola a stabilire la nuova specie idrocastorite. Ho scelto dapprima per l'analisi un campione che sembra meno inquinato d'im-

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di mineralogia del R. Istituto di studî superiori di Firenze.

(2) *Stilbite e foresite nel granito elbano.* Atti Soc. tosc., nuova serie (1900), XVII, pag. 203.

(3) *Zeoliti del filone della Speranza presso S. Piero in Campo* (Elba). Atti Soc. toscana, nuova serie (1906), XXII, pag. 150.