ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 25 aprile 1920.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Su alcuni punti di Calcolo delle Variazioni.* Nota di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

1. Nel Calcolo delle Variazioni, e precisamente in quella sua parte che si occupa del minimo dell'integrale

$$I_c = \int_c F(x, y, x', y')\, ds \ (^1),$$

si dimostra la necessità delle condizioni di Legendre e di Weierstrass, su ogni arco di curva minimante I_c che abbia sempre tangente variabile in modo continuo e sia composto di punti *interni* al campo che si considera. La dimostrazione viene ottenuta, di solito, sfruttando la cosiddetta formula ai limiti e, in ogni caso, tenendo essenzialmente conto del fatto che l'arco detto è un arco di estremale. Non è perciò possibile, per questa via, di studiare la necessità o meno delle indicate condizioni sugli archi di una curva minimante che abbiano punti sulla frontiera del campo.

In una Memoria, già da molti mesi inviata per la stampa ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, ho messo in piena luce — e credo

(1) Ammettiamo, in questa Nota, per la F, le solite condizioni poste nei trattati di Calcolo delle Variazioni; ammettiamo anche di considerare il minimo di I_c fra tutte le curve continue e rettificabili che congiungono due dati punti del piano (xy) e appartengono ad un dato campo.

per primo — il significato delle condizioni di Legendre e di Weierstrass, mostrando come esse non facciano che tradurre in disuguaglianze il fatto che, *su ogni curva minimante, l'integrale* I_c *deve essere una funzione semicontinua inferiormente della linea d'integrazione.*

Ammesso per semplicità — cosa che faremo in tutta la presente Nota — che la frontiera del campo considerato sia costituita di un numero finito di curve continue, prive di punti multipli e senza punti comuni, ciascuna delle quali risulti di un numero finito di archi a tangente variabile in modo continuo, dai risultati della Memoria indicata segue pertanto:

a) *Le condizioni di Legendre e di Weierstrass devono essere verificate su ogni arco* di curva minimante* I_c *che abbia ovunque tangente che varia in modo continuo (siano i suoi punti interni o no al campo considerato).*

b) *Le stesse condizioni devono essere quasi dappertutto soddisfatte su ogni curva minimante* I_c, *supposto semplicemente che questa curva sia rettificabile.*

2. È noto come, in ogni punto angoloso P_0 di una curva minimante I_c, debba, se il punto è *interno* al campo, esser verificata la condizione, detta di Weierstrass-Erdmann, espressa dalle due uguaglianze

$$\bar{F}_{x'} = \tilde{F}_{x'}\ ,\quad \bar{F}_{y'} = \tilde{F}_{y'}\,, \tag{1}$$

dove $\bar{F}_{x'}, \bar{F}_{y'}$ rappresentano i valori delle derivate parziali $F_{x'}, F_{y'}$ calcolati in P_0 sull'arco $\bar{\alpha}$, della curva minimante, che termina nel punto angoloso, e $\tilde{F}_{x'}, \tilde{F}_{y'}$ quelli calcolati sull'arco $\tilde{\alpha}$, della stessa curva, che comincia in P_0 [1]. Se il punto angoloso, anzichè essere interno al campo, è sulla sua frontiera, e ove questa ha tangente che varia con continuità, supposto uno degli archi $\tilde{\alpha}, \bar{\alpha}$ ($\bar{\alpha}$, ad esempio) tutto composto di punti interni al campo, ad eccezione di P_0, deve essere verificata in P_0 la condizione, determinata da Weierstrass,

$$\cos\theta_0(\bar{F}_{x'} - \tilde{F}_{x'}) + \operatorname{sen}\theta_0(\bar{F}_{y'} - \tilde{F}_{y'}) = 0\,, \tag{2}$$

dove θ_0 indica l'angolo di direzione della tangente in P_0 alla frontiera del campo. Come è evidente, la (2) è soddisfatta se lo sono le (1), ma non viceversa. *Ci proponiamo di mostrare che le* (1) *valgono anche nel caso attuale.*

Scegliamo due punti Q e P_1, rispettivamente su $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$, e, considerato un punto qualunque dell'arco P_0P_1 di $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}(P_0,P_1)$, indichiamo con t la lunghezza dell'arco $\tilde{\alpha}(P_0,P)$ e con t_1 quella di $\tilde{\alpha}(P_0,P_1)$. Possiamo, in infiniti modi, costruire una famiglia di curve α_t, congiungenti Q con tutti i

[1] Ammettiamo che gli archi $\bar{\alpha}$ e α abbiano ovunque tangente variabile in modo continuo.

punti P di $\tilde{\alpha}(P_0, P_1)$, appartenenti al campo considerato, e in guisa che, detta s la lunghezza generica dell'arco su $\overline{\alpha}$, a partire da Q, e indicate con $x = \overline{x}(s)$, $y = \overline{y}(s)$, $(0 \leq s \leq s_0)$ le equazioni parametriche di $\overline{\alpha}(Q, P_0)$ e con $x = \overline{x}(s) + \varphi(s, t)$, $y = \overline{y}(s) + \psi(s, t)$, $(0 \leq s \leq s_0)$ quelle di α_t, le funzioni φ e ψ, per tutti i valori di s dell'intervallo $(0, s_0)$ e tutti quelli di t dell'intervallo $(0, t_1)$, siano finite e continue insieme con le loro derivate parziali prime e quelle seconde miste, e che, per $t = 0$, le φ, ψ, φ_s, ψ_s siano tutte eguali allo zero. Dovendo aversi, per ogni t di $(0, t_1)$,

$$I_{\alpha_t} \geq J_{\overline{\alpha}(Q, P_0)} + I_{\tilde{\alpha}(P_0, P)},$$

ed essendo i due membri di questa disuguaglianza uguali per $t = 0$, la stessa disuguaglianza dovrà essere verificata fra le corrispondenti derivate rispetto a t, per $t = 0$. Dovrà essere perciò (poichè $\overline{\alpha}$ è necessariamente un arco di estremale)

$$\cos \tilde{\theta}_0 \, \overline{F}_{x'} + \operatorname{sen} \tilde{\theta}_0 \, \overline{F}_{y'} \geq \tilde{F},$$

dove $\tilde{\theta}_0$ indica l'angolo di direzione della tangente in P_0 a $\tilde{\alpha}$. Indicando con $\overline{\theta}_0$ il corrispondente angolo per $\overline{\alpha}$, e con x_0, y_0 le coordinate di P_0, e introducendo la funzione E di Weierstrass, si avrà dunque $E(x_0 \, y_0 \, ; \cos \overline{\theta}_0 ,$ $\operatorname{sen} \overline{\theta}_0 \, ; \cos \tilde{\theta}_0 , \operatorname{sen} \tilde{\theta}_0) \leq 0$. Ma, per la condizione di Weierstrass (n. 1), è $E(x_0 \, y_0 \, ; \cos \overline{\theta}_0 , \operatorname{sen} \overline{\theta}_0 \, ; \cos \theta , \operatorname{sen} \theta) \geq 0$, per ogni θ, onde

$$E(x_0 , y_0 \, ; \cos \overline{\theta}_0 , \operatorname{sen} \overline{\theta}_0 \, ; \cos \tilde{\theta}_0 , \operatorname{sen} \tilde{\theta}_0) = 0,$$

ed anche

$$\left[\frac{d}{dt} E(x_0 , y_0 \, ; \cos \overline{\theta}_0 , \operatorname{sen} \overline{\theta}_0 \, ; \cos \theta , \operatorname{sen} \theta)\right]_{\theta = \tilde{\theta}_0} = 0.$$

Da queste uguaglianze si ricavano senza difficoltà le (1).

Può presentarsi anche il caso che, essendo P_0 sulla frontiera, nessuno dei due archi $\overline{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ risulti composto di punti tutti (ad eccezione di P_0) interni al campo. In tale ipotesi, se è $\overline{\theta}_0 = \tilde{\theta}_0$, le (1) sono senz'altro verificate; se invece è $\overline{\theta}_0 \neq \tilde{\theta}_0$, deve essere $|\overline{\theta}_0 - \tilde{\theta}_0| = \pi$ e $\overline{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ (entrambi tangenti in P_0 alla frontiera del campo) devono avere infiniti punti sulla frontiera e dalla stessa parte di P_0. Esistono, perciò, in prossimità di P_0, infiniti punti comuni a $\overline{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$, e da ciò scende che è ancora

$$E(x_0 , y_0 \, ; \cos \overline{\theta}_0 , \operatorname{sen} \overline{\theta}_0 \, ; \cos \tilde{\theta}_0 , \operatorname{sen} \tilde{\theta}_0) = 0.$$

Ed infatti, per la condizione di Weierstrass, deve essere

$$E(x_0 , y_0 \, ; \cos \overline{\theta}_0 , \operatorname{sen} \overline{\theta}_0 \, ; \cos \tilde{\theta}_0 , \operatorname{sen} \tilde{\theta}_0) \geq 0;$$

e se qui valesse il segno $>$, si avrebbe, per la $|\overline{\theta}_0 - \tilde{\theta}_0| = \pi$, $\overline{F} + \tilde{F} > 0$

e quindi, per ogni punto M sufficientemente vicino a P_0 e comune a $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$,

$$I_{\bar{\alpha}(M,P_0)} + I_{\tilde{\alpha}(P_0,M)} > 0,$$

ciò che contraddirebbe al fatto che $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ fanno parte di una curva minimante I_c. Dalla uguaglianza $E(x_0, y_0; \cos\bar{\theta}_0, \operatorname{sen}\bar{\theta}_0; \cos\tilde{\theta}_0, \operatorname{sen}\tilde{\theta}_0) = 0$ e dalla condizione di Weierstrass si deduce, come dianzi, la validità delle (1).

Possiamo dunque enunciare il seguente risultato: *se gli archi, a tangente variabile in modo continuo, $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$, formano in P_0 un punto angoloso e appartengono ad una curva minimante I_c, e se P_0 è interno al campo che si considera oppure, appartenendo alla frontiera, è interno ad un arco, di tale frontiera, a tangente variabile in modo continuo, in P_0 valgono le* (1).

Questa proposizione si estende immediatamente al caso in cui la frontiera del campo non ha tangente in P_0, purchè presenti in esso un punto angoloso e rivolga il minore dei due angoli ivi formati verso l'interno del campo, e purchè anche i due archi $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$, se nessuno di essi ha tutti i suoi punti (escluso P_0) interni al campo, non siano separatamente tangenti in P_0 ai due archi della frontiera che in tal punto concorrono.

3. Le condizioni (1) più non sono necessariamente soddisfatte se il punto angoloso P_0 è vincolato a restare su una data curva β. Se gli archi $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$, dotati ovunque di tangente variabile con continuità, hanno tutti i loro punti (escluso al più P_0) interni al campo che si considera e restano entrambi da quella parte di β che non contiene, in prossimità di β stessa, la frontiera del campo, in luogo delle (1) si ha soltanto, in P_0, la condizione (2), dove ora θ_0 indica l'angolo di direzione della tangente a β in P_0, tangente che si ammette esistere e variare con continuità in tutto un intorno del punto detto. *Se, ferme restando le altre condizioni, supponiamo che anche β abbia in P_0 un punto angoloso e che il minore dei due angoli formati da β sia quello che contiene $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$, possiamo mostrare che, in P_0, non solo vale ancora la* (2) *(quando in essa θ_0 indichi l'angolo di direzione di una qualunque delle due tangenti anteriore e posteriore a β), ma valgono pure le* (1).

Ripetendo il ragionamento che si fa di solito per dimostrare la (2) quando β non abbia punto angoloso, si ottengono le disuguaglianze

$$(3) \qquad \begin{cases} \cos\theta_0 \{ \bar{F}_{x'} - \tilde{F}_{x'} \} + \operatorname{sen}\theta_0 \{ \bar{F}_{y'} - \tilde{F}_{y'} \} \geq 0, \\ \cos\theta_0' \{ \bar{F}_{x'} - \tilde{F}_{x'} \} + \operatorname{sen}\theta_0' \{ \bar{F}_{y'} - \tilde{F}_{y'} \} \leq 0, \end{cases}$$

nelle quali θ_0 e θ_0' indicano gli angoli di direzione delle tangenti in P_0 rispettivamente all'arco di β che comincia in P_0 e a quello che in tal punto termina. Supponiamo che almeno una delle (1) non sia soddisfatta e cominciamo con l'osservare che, scegliendo opportunamente il senso positivo sulla β, e conducendo per P_0 tre raggi $\overline{r}_0, r_0, r'_0$, i cui angoli di direzione siano $\overline{\theta}_0, \theta_0, \theta'_0$, il raggio r'_0 viene a risultare appartenente a quello dei due angoli che fanno fra loro $\overline{r}_0$ e r_0, che è $\leq \pi$. Indichiamo con ω tale angolo, che contiene r'_0, e consideriamo in esso un raggio variabile r, di cui diremo θ l'angolo di direzione. La funzione

$$\Phi(\theta) = \cos\theta \{ \overline{F}_{x'} - \tilde{F}_{x'} \} + \operatorname{sen}\theta \{ \overline{F}_{y'} - \tilde{F}_{y'} \},$$

per $r = \overline{r}_0$, ossia $\theta = \overline{\theta}_0$, è data da $E(x_0 y_0 ; \cos\tilde{\theta}_0, \operatorname{sen}\tilde{\theta}_0 ; \cos\overline{\theta}_0, \operatorname{sen}\overline{\theta}_0)$ ed è perciò, per la condizione di Weierstrass (n. 1), $\Phi(\overline{\theta}_0) \geq 0$.

Per $r = r_0$, ossia $\theta = \theta_0$, è, per la prima delle (3), $\Phi(\theta_0) \geq 0$; e, per la seconda delle (3), è $\Phi(\theta'_0) \leq 0$. Ma la funzione $\Phi(\theta)$ non può annullarsi se non per due valori di θ distinti fra loro per π; se dunque fosse $\Phi(\theta'_0) < 0$, $\Phi(\theta)$ dovrebbe esser nullo per due posizioni distinte di r in ω, e l'ampiezza di questo angolo risulterebbe uguale a π, e si avrebbe $\Phi(\overline{\theta}_0) = \Phi(\theta_0) = 0$. Dalla $\Phi(\overline{\theta}_0) = 0$, e dalla condizione di Weierstrass $E(x_0, y_0 ; \cos\tilde{\theta}_0, \operatorname{sen}\tilde{\theta}_0 ; \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \geq 0$, valida per ogni θ, si ricaverebbero allora le (1), come già si è fatto al n. 2, e si andrebbe così contro l'ipotesi ammessa. Deve essere, pertanto, $\Phi(\theta'_0) = 0$. E non potendo valere la $\Phi(\overline{\theta}_0) = 0$, come or ora si è veduto, deve r'_0 risultare distinto da $\overline{r}_0$. Il raggio r'_0 è poi distinto da r_0, perchè altrimenti β non avrebbe in P_0 un punto angoloso. Dovendo essere perciò $\Phi(\overline{\theta}_0) > 0$, $\Phi(\theta_0) > 0$, e $\Phi(\theta) \neq 0$ per $r \neq r'_0$, $\Phi(\theta'_0)$ è un minimo per la $\Phi(\theta)$, ed è $\Phi'(\theta'_0) = 0$. Da questa e dalla $\Phi(\theta'_0) = 0$ scendono immediatamente le (1).

La proposizione ora dimostrata vale anche se i punti di $\overline{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ (escluso P_0) non sono tutti interni al campo considerato, purchè, quando nessuno dei due archi detti abbia tutti i suoi punti (escluso P_0) interni al campo, gli archi stessi non siano separatamente tangenti ai due archi di β che concorrono in P_0.

Mineralogia. — *Sopra un minerale polverulento di Dorgali in Sardegna.* Nota dell'ing. Enrico Clerici, presentata dal Corrispondente F. Millosevich.

In una recente missione a Iglesias fui interpellato sopra un minerale polverulento, proveniente da un permesso di ricerca in comune di Dorgali, e che si asseriva combustibile se gettato sul fuoco.

Il campione che ne ho avuto è una polvere piuttosto grossolana, di colore bianco con leggerissima sfumatura verdognola. Al microscopio, i singoli granuli sono informi, di differente grandezza, incolori, e, tranne qualche granello di quarzo, perfettamente isotropi. L'indice di rifrazione è molto basso; col metodo dell'immersione ho trovato che esso è compreso fra quello