ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 maggio 1920.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *L'iterazione completa di $x^2 - 2$.* Nota del Socio S. Pincherle.

Il problema dell'espressione, in forma esplicita, dell'iterata generale di una funzione di una variabile avente forma analitica determinata, non è risoluto, quando la funzione non sia la lineare, se non in un numero limitatissimo di casi. Perciò la trattazione della questione, anche su di un esempio specialissimo, non sembra oziosa: tanto più che in questo esempio, per circostanze particolarmente favorevoli di cui verrà data ragione in un prossimo lavoro di carattere più generale, la questione può essere condotta a fondo coi mezzi più elementari.

1. La funzione, di cui si vuole trovare l'iterata completa, è il semplice binomio

$$\alpha(x) = x^2 - 2\,;$$

con $S_\alpha f(x)$, o semplicemente $S f(x)$, si indicherà la trasformazione per cui la variabile complessa x si sostituisce con $\alpha(x)$; S^r sarà il corrispondente gruppo continuo di trasformazione, ad un parametro. Si vuole mostrare come sia possibile di dare, in modo semplice, l'espressione analitica di S^r per r qualunque.

2. Essendo $x = u + iv$ un punto del piano-sfera x, n un numero intero positivo, si porrà

$$S^n x = x_n \quad , \quad S^{-n} x = (x'_n)\,.$$

Qui x_n è un punto determinato, n^{simo} conseguente di x; (x'_n) è un sistema di 2^n punti, antecedenti n^{simi} di x, e di cui uno, generico, verrà indicato con x'_n.

3. Dal piano-sfera x, si tolga il segmento dell'asse reale compreso fra -2 e 2, gli estremi inclusi; questo segmento verrà detto Γ. La porzione rimanente del piano-sfera si dirà Ω; Ω è dunque un campo semplicemente connesso, contenente il punto all'infinito, aperto, e di cui Γ costituisce il contorno.

Posta l'equazione

$$\omega^2 - x\omega + 1 = 0 , \tag{1}$$

questa dà origine ad un ramo di funzione analitica univocamente determinata in tutto Ω dalla condizione di essere in modulo minore d'uno. Ω viene con ciò ad essere uno dei due fogli della Riemanniana, escluso il taglio, rappresentativa della relazione (1). Indicando col segno —, apposto al radicale, che si tratta della radice di (1) minore in modulo dell'unità, il ramo di funzione in discorso è

$$\omega(x) = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2 - 4}\right). \tag{2}$$

La $\omega(x) = t$, equivalente ad

$$x = t + \frac{1}{t} , \tag{3}$$

dà la rappresentazione conforme del campo Ω sull'interno del cerchio C del piano t, di centro nell'origine e raggio 1; al centro di C corrisponde il punto $x = \infty$; ai cerchi $|t| = \varrho$ di raggio crescente da 0 ad 1 (escluso) corrispondono le ellissi omofocali di fuochi ± 2

$$\frac{u^2}{\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)^2} = 1 , \tag{4}$$

di semiasse maggiore decrescente dall'infinito a 2 (escluso); queste ellissi si diranno E_ϱ, e ϱ ne sarà l'*indice*.

La $\omega(x)$ è funzione analitica regolare per $x = \infty$, nulla di prim'ordine in quel punto, e sviluppabile, per $|x| > 2$, in serie della forma

$$\omega(x) = \frac{1}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \cdots$$

4. Poichè dalle (3) si ricava

$$x^2 - 2 = t^2 + \frac{1}{t^2} ,$$

ne viene $t^2 = \omega(\alpha(x))$, cioè la $\omega(x)$ verifica l'equazione funzionale

$$S_\alpha\, \omega(x) = \omega^2(x)\,, \tag{5}$$

onde

$$S_\alpha^n\, \omega(x) = \omega^{2^n}(x) \tag{5'}$$

per n intero, positivo o negativo, intendendosi che in questo ultimo caso il secondo membro dà 2^n valori.

5. Per il n. 3, sull'ellisse E_ϱ è $|\omega(y)| = \varrho$, onde sarà per la (5')

$$|\omega(\alpha(x))| = \varrho^2\,;$$

se x è nella ellisse di indice ϱ, x_1 è dunque su quella di indice ϱ^2. « Il « sistema delle ellissi E, e quindi la schiera delle coniche omofocali, ammette « dunque la trasformazione S data da $x_1 = x^2 - 2$; in altri termini, questa « schiera costituisce un sistema di imprimitività per il gruppo S^n ».

6. Il fatto ora notato permette facilmente di indicare la distribuzione dei conseguenti e degli antecedenti dei punti di Ω nel piano. Se x è uno di questi punti, e ϱ è l'indice dell'ellisse passante per x, i suoi successivi conseguenti saranno sulle ellissi di indici $\varrho^2, \varrho^4, \ldots, \varrho^{2^n}, \ldots$ e, come si vede facilmente, le loro distanze dall'origine $x = 0$ cresceranno in modo paragonabile ai termini di una progressione ultrageometrica

$$c\,, c^2\,, c^{2^2}\,, \ldots c^{2^n}\,, \ldots$$

dove c è positivo e maggiore d'uno. In quanto agli antecedenti, i punti (x'_n) sono sull'ellisse di indice $\sqrt[2^n]{\varrho}$, e per $n = \infty$, questa ellisse tende al segmento Γ; « i punti limiti degli antecedenti sono dunque sul segmento che « congiunge i fuochi ». Ma v'è di più: « Ogni punto di Ω ha, come aggre- « gato derivato dei suoi antecedenti, tutto quel segmento Γ ». Infatti, ad x la (3) fa corrispondere un punto t interno al cerchio C; ai sistemi dei punti $(x'_1), (x'_2), \ldots (x'_n), \ldots$ corrisponderanno i sistemi di punti

$$\sqrt{t}\,, \sqrt[4]{t}\,, \ldots \sqrt[2^n]{t}\,, \ldots \tag{6}$$

i quali hanno come punti limiti tutti i punti della circonferenza C. Fissato arbitrariamente un punto $e^{i\theta}$ su questa circonferenza, si può scegliere in ciascuno dei sistemi (6) un punto, rispettivamente $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ la cui successione tenda ad $e^{i\theta}$. Ma t_n avrà in Ω il corrispondente

$$x'_n = t_n + \frac{1}{t_n}\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

e la successione degli x'_n tenderà a $2\cos\theta$, che, per l'arbitrarietà di θ, è un punto qualunque di Γ.

7. L'ultimo risultato ora indicato può enunciarsi nel seguente modo: « Se con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, si rappresenta l'uno o l'altro dei due segni $+$ o $-$, « se x è un numero qualunque complesso, o reale maggiore di 2 o minore « di -2, e se infine g è un numero reale arbitrario compreso fra -2 e 2 « (inclusi), è sempre possibile di determinare la successione dei segni ε_1, « $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ in modo che la successione

$$\varepsilon_1 \sqrt{2+x}\,,\ \varepsilon_2 \sqrt{2+\varepsilon_1 \sqrt{2+x}}\,,\ \varepsilon_3 \sqrt{2+\varepsilon_2 \sqrt{2+\varepsilon_1 \sqrt{2+x}}}\,, \ldots$$

« abbia per limite g ».

8. Dalla posizione $\omega(x) = t$ risultando $\omega(\alpha(x)) = t^2$, ossia

$$\alpha(x) = t^2 + \frac{1}{t^2}\,,$$

ne viene, per n intero positivo

$$\alpha_n(x) = t^{2^n} + t^{-2^n} = \omega^{2^n}(x) + \omega^{-2^n}(x)\,,$$

cioè

$$\alpha_n(x) = \left(\frac{x - \sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{x + \sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}. \tag{7}$$

Questa formula, conseguenza della (5) per n intero e positivo, dà *la definizione* dell'iterata generale di x^2-2 per indice di iterazione n qualsivoglia. A giustificare questa definizione, basta osservare che da essa si deduce immediatamente la legge degli indici

$$\alpha_m(\alpha_n(x)) = \alpha_{m+n}(x)$$

per m, n qualsivogliano. La (7) dà dunque l'espressione analitica del gruppo S^n continuo.

9. L'equazione di Schroeder

$$S_\alpha f(x) = k f(x)\,,$$

ha, per $\alpha(x) = x^2 - 2$, soluzione per il solo valore $k=2$, e questa soluzione, all'infuori d'un moltiplicatore costante arbitrario, è data da $\log \omega(x)$. In corrispondenza, è $\log\log \omega(x)$ la soluzione della equazione di Abel.

10. Per i valori $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, le espressioni

$$\omega^\nu(x) + \omega^{-\nu}(x)$$

o somme delle potenze simili delle radici della equazione (1), sono i noti polinomi $V_\nu(x)$, con $V_0 = 2$, $V_1 = x$, classici nell'algebra e nella moltiplicazione degli archi (¹), legati dalla relazione ricorrente

$$V_\nu - x V_{\nu-1} + V_{\nu-2} = 0\,. \tag{8}$$

(¹) V. p. es. Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, tom. I, pag. 138 e seg.; pag. 235 e seg. (Paris, Gauthier-Villars, 4ème éd., 1877).

Or bene, risulta da quanto precede, e precisamente dalla (7), il fatto notevole che codesti polinomî sono iterate (per indice generalmente non razionale) della funzione $x^2 - 2$; precisamente, $V_\nu = \alpha_r(x)$, dove r è il logaritmo di ν in base 2.

Ne risulta, per i polinomî V_ν, la proprietà che non credo sia stata avvertita:

$$V_\mu(V_\nu) = V_{\mu\nu}\,. \tag{9}$$

Inoltre, poichè la schiera delle coniche omofocali di fuochi ± 2 è trasformata in sè dalla sostituzione $x_1 = x^2 - 2$, essa lo è pure da ogni sostituzione $x_1 = V_\nu(x)$, per essere questa una iterata — sebbene di indice generalmente non razionale — della $x^2 - 2$.

Come si è avvertito, la questione trattata in questa breve Nota ha carattere assai elementare. Tuttavia, essa non sembra priva d'interesse, per il fatto che un noto sistema di polinomî si presenta come formato da iterate ad indice non intero di uno di essi, ma più ancora perchè mentre una questione analoga si può risolvere per l'iterazione di un polinomio intero $\alpha(x)$ qualunque, la soluzione ha indole trascendente di grado elevato, e solo per condizioni specialissime si abbassa ad avere carattere algebrico elementare, come nel caso di

$$\alpha(x) = x^2 - 2\,.$$

Matematica. — *Su alcune altre formole d'inversione collegate col metodo d'integrazione di Riemann.* Nota del Corrispondente O. Tedone.

I.

1. Il desiderio di dare forma definitiva, o, almeno, di apportare un contributo di qualche importanza alle soluzioni di alcuni problemi di meccanica che dipendono da equazioni a derivate parziali del tipo di Eulero e di Poisson, e, in particolar modo, alla soluzione del notevolissimo problema di Riemann, del moto di un fluido elastico per onde piane di ampiezza finita, mi ha condotto alle ricerche preliminari che mi permetto di esporre in questa Nota.

Le questioni, a cui il metodo di Riemann propriamente detto, si può applicare, fanno intervenire, ordinariamente, il tempo ed una sola coordinata spaziale. Ed è stato a proposito, appunto, del problema citato che Riemann ha esposto il suo metodo d'integrazione. Devesi però notare che, quando si tratta di applicare il metodo di Riemann a problemi concreti di meccanica