# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

**VOLUME XXIX.**

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Or bene, risulta da quanto precede, e precisamente dalla (7), il fatto notevole che codesti polinomî sono iterate (per indice generalmente non razionale) della funzione $x^2-2$; precisamente, $V_\nu = \alpha_r(x)$, dove $r$ è il logaritmo di $\nu$ in base 2.

Ne risulta, per i polinomî $V_\nu$, la proprietà che non credo sia stata avvertita:

$$V_\mu(V_\nu) = V_{\mu\nu}\,. \tag{9}$$

Inoltre, poichè la schiera delle coniche omofocali di fuochi $\pm 2$ è trasformata in sè dalla sostituzione $x_1 = x^2 - 2$, essa lo è pure da ogni sostituzione $x_1 = V_\nu(x)$, per essere questa una iterata — sebbene di indice generalmente non razionale — della $x^2-2$.

Come si è avvertito, la questione trattata in questa breve Nota ha carattere assai elementare. Tuttavia, essa non sembra priva d'interesse, per il fatto che un noto sistema di polinomî si presenta come formato da iterate ad indice non intero di uno di essi, ma più ancora perchè mentre una questione analoga si può risolvere per l'iterazione di un polinomio intero $\alpha(x)$ qualunque, la soluzione ha indole trascendente di grado elevato, e solo per condizioni specialissime si abbassa ad avere carattere algebrico elementare, come nel caso di

$$\alpha(x) = x^2 - 2\,.$$

## Matematica. — *Su alcune altre formole d'inversione collegate col metodo d'integrazione di Riemann.* Nota del Corrispondente O. Tedone.

I.

1. Il desiderio di dare forma definitiva, o, almeno, di apportare un contributo di qualche importanza alle soluzioni di alcuni problemi di meccanica che dipendono da equazioni a derivate parziali del tipo di Eulero e di Poisson, e, in particolar modo, alla soluzione del notevolissimo problema di Riemann, del moto di un fluido elastico per onde piane di ampiezza finita, mi ha condotto alle ricerche preliminari che mi permetto di esporre in questa Nota.

Le questioni, a cui il metodo di Riemann propriamente detto, si può applicare, fanno intervenire, ordinariamente, il tempo ed una sola coordinata spaziale. Ed è stato a proposito, appunto, del problema citato che Riemann ha esposto il suo metodo d'integrazione. Devesi però notare che, quando si tratta di applicare il metodo di Riemann a problemi concreti di meccanica o di fisica-matematica, le formole a cui questo metodo immediatamente conduce, sono atte, senz'altro, a risolvere i problemi stessi, solo se, fra i dati accessorii di essi, non vi sieno che condizioni iniziali, ed i fenomeni da questi problemi interpretati si possano considerare come esistenti in tutto uno spazio indefinito ad una dimensione. Quando, al contrario, uno di questi problemi si complica per la presenza di condizioni ai limiti pel fatto che il problema si riferisce ad un fenomeno che avviene, o si considera, solo in una porzione limitata del detto spazio, allora la formola di integrazione di Riemann può ancora portare alla soluzione completa del problema solo se sappiamo anche risolvere certe equazioni integrali di Volterra che il problema stesso è capace subito di indicarci.

In questa Nota ci occuperemo principalmente di equazioni integrali che si incontrano nel problema considerato da Riemann ed in problemi analoghi.

2. Per raggiungere il nostro scopo, ci fonderemo su osservazioni e procedimenti già sfruttati a proposito di un'altra questione [1] che potrebbe, del resto, considerarsi come facente tutto un corpo con quella di cui iniziamo lo studio. E, come punto di partenza delle presenti ricerche, prenderemo l'equazione di Eulero e di Poisson con invarianti eguali sotto la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\xi^2}\, u = 0\,, \tag{1}$$

ovvero sotto l'altra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau\, \partial \tau'} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{(\tau-\tau')^2}\, u = 0 \tag{1'}$$

con

$$\tau = \eta + \xi\,, \quad \tau' = \eta - \xi\,, \tag{2}$$

$\lambda$ essendo una costante perfettamente arbitraria. Questa equazione gode della proprietà di essere aggiunta di se stessa e dell'altra, di trasformarsi in se stessa eseguendo su $\tau$ e $\tau'$ una medesima trasformazione lineare, intera o fratta. Quest'ultima proprietà è solo un caso particolare di un'altra di cui gode l'equazione più generale del tipo di Eulero e di Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau\, \partial \tau'} - \frac{\lambda'}{\tau-\tau'}\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\lambda}{\tau-\tau'}\frac{\partial u}{\partial \tau'} - \frac{p}{(\tau-\tau')^2}\, u = 0\,, \tag{3}$$

$\lambda$, $\lambda'$ e $p$ essendo tre costanti qualunque, e che si dimostra, senza difficoltà, con calcolo diretto. Per la proprietà di cui parliamo, se si opera nella (3) la trasformazione

$$\tau = \frac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d}\,, \quad \tau' = \frac{a\tau'_1 + b}{c\tau'_1 + d}\,. \tag{4}$$

(1) *Su alcune equazioni integrali di Volterra* ecc. Questi Rendic., seduta 1° febbraio 1914.

con $a, b, c, d$ costanti qualunque, e, nello stesso tempo, si pone

$$\text{(5)} \qquad U = (c\tau_1 + d)^{-\lambda} (c\tau_1' + d)^{-\lambda'} u \left[ \frac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d}, \frac{a\tau_1' + b}{c\tau_1' + d} \right],$$

U, come funzione di $\tau_1$ e di $\tau_1'$, soddisfa alla stessa equazione (3) alla quale soddisfa $u$ come funzione di $\tau$ e di $\tau'$ [1].

Moltiplicando la funzione $u$ per una conveniente potenza di $\tau - \tau'$, si trasforma la (3) in un'altra equazione dello stesso tipo in cui il nuovo $p$ è zero. L'equazione (3), quando in essa si supponga $p = 0$, è indicata dal Darboux col simbolo $E(\lambda, \lambda')$, mentre una soluzione qualunque di questa equazione è indicata dallo stesso autore col simbolo $Z(\lambda, \lambda')$. Si mostra allora subito che

$$\text{(6)} \qquad \frac{\partial Z(\lambda, \lambda')}{\partial \tau} = Z(\lambda + 1, \lambda') \qquad \frac{\partial Z(\lambda, \lambda')}{\partial \tau'} = Z(\lambda, \lambda' + 1)$$

la prima delle quali, p. es., vuol dire esattamente che la derivata di $Z(\lambda, \lambda')$ rispetto a $\tau$, soddisfa alla equazione $E(\lambda + 1, \lambda')$.

3. Ricordiamo ora che il metodo di Riemann per risolvere il problema di Cauchy (concetto che precisa meglio quello vago di integrazione) per la equazione (1) è fondato sull'osservazione che, se $u$ e $z$ sono due soluzioni distinte di essa e poniamo

$$\text{(7)} \qquad U = u \frac{\partial z}{\partial \eta} - z \frac{\partial u}{\partial \eta}, \qquad V = u \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

l'espressione

$$U d\xi + V d\eta$$

è un differenziale esatto. Per cui, per ogni contorno $c$ regolare, chiuso, racchiudente un'area, all'interno della quale, contorno compreso, le funzioni $u$ e $z$ sieno regolari, è

$$\text{(8)} \qquad \int_c (U d\xi + V d\eta) = 0 .$$

Con l'aiuto della (8), se su di una linea $s$ non intrecciata, aperta e regolare, sono assegnati i valori che si vuole acquistino su $s$ una soluzione $u$ della (1) e quelli delle sue derivate, in modo arbitrario ma compatibile, si può, spesso, con facilità, costruire il valore di $u$ in un punto $(x, y)$ fuori di $s$ [problema di Cauchy per l'equazione (1)]. Basta applicare la (8) al

[1] Una dimostrazione di questa proposizione, valevole nel caso di $p = 0$ e dovuta all'Appell, è riportata dal Darboux nelle sue *Leçons sur la théorie des surfaces*, deuxième partie, pag. 58, n. 349. La proposizione stessa è dovuta al Darboux nel caso particolare in cui l'equazione ha la forma (1'); per il qual caso l'autore, nel luogo citato, dà una rapida dimostrazione.

contorno chiuso formato da $s$ e dalle due caratteristiche della equazione (1) uscenti dal punto $(x, y)$

$$\xi - x - (\eta - y) = 0 \quad , \quad \xi - x + \eta - y = 0 \tag{9}$$

quando per $z$ si assuma la funzione di Riemann relativa alla stessa equazione (1) ed al punto $(x, y)$, cioè la soluzione di (1) regolare nell'intorno del punto $(x, y)$ e che sulle due caratteristiche precedenti assume il valore uno. Se $z$ è regolare in tutto il campo indicato, chiamando 1 e 2 i due punti d'incontro di $s$ con le due rette (9) nell'ordine in cui le loro equazioni sono scritte, si trova così la formola di Riemann

$$2u(x, y) = u_1 + u_2 - \int_1^2 (\mathrm{U}d\xi + \mathrm{V}d\eta), \tag{10}$$

l'integrale essendo esteso al pezzo di linea $s$ compreso fra i punti 1 e 2.

4. Con l'aiuto della (10), la risoluzione del problema di Cauchy per la equazione (1) è ridotto alla ricerca della funzione di Riemann corrispondente. A questo scopo, posto

$$\varkappa = \frac{(\eta - y)^2 - (\xi - x)^2}{4\xi x}, \tag{11}$$

notiamo che $\varkappa$ si annulla sulle due caratteristiche uscenti dal punto $(x, y)$ e che la (1) ammette soluzioni funzioni di $\varkappa$ soltanto, le quali non sono altro che le soluzioni dell'equazione ipergeometrica

$$\varkappa(1 - \varkappa)\frac{d^2 z}{d\varkappa^2} + (1 - 2\varkappa)\frac{dz}{d\varkappa} + \lambda(\lambda + 1) z = 0. \tag{12}$$

Per la nostra funzione di Riemann potremo quindi adottare la soluzione della (12), regolare nell'intorno di $\varkappa = 0$ e che per $\varkappa = 0$ si riduce ad uno.

Occorre distinguere varî casi. Per $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$ è semplicemente $z = 1$.

Del resto, qualunque sia $\lambda$, si può sempre porre la funzione di Riemann sotto la forma di una serie ipergeometrica

$$z = \mathrm{F}(-\lambda, \lambda + 1, 1, \varkappa) \tag{13}$$

la quale si riduce, appunto, ad uno per $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$, e, per $\lambda$ eguale ad un numero intero positivo o negativo, si riduce ad un polinomio in $\varkappa$. Per ogni altro valore di $\lambda$, affinchè si possa dare alla funzione di Riemann l'espressione (13), occorre che, per ogni fissato punto $(x, y)$, il campo di variabilità di $\xi$ e $\eta$, che cade nelle nostre considerazioni, sia tale che in esso sia $|\varkappa| < 1$. In ogni caso, in questo campo, dev'essere $\xi \neq 0$.

In quei casi particolari in cui

$$-1 < \lambda < 0,$$

la funzione $z$ si può assumere sotto la forma di un integrale definito

$$(14) \qquad z = \frac{1}{\Pi(\lambda)\,\Pi(-\lambda-1)} \int_0^1 s^{\lambda}(1-s)^{-\lambda-1}(1-s\varkappa)^{\lambda}\,ds\,.$$

In quest'ultima ipotesi, si ha nella (14) una espressione analitica che conserva un significato per ogni valore finito di $\varkappa$, tranne per il valore $\varkappa = 1$, per il quale la funzione $z$ diventa infinita. Fissato quindi il punto $(x, y)$, perchè la formola di Riemann sia applicabile, occorre soltanto che il campo di variabilità di $\xi$ e $\eta$ non sia attraversato, o toccato, nè dalla retta $\xi = 0$, nè dalla linea $\varkappa = 1$; la quale ultima linea è formata dalle due caratteristiche della (1) uscenti dal punto $(-x, y)$ simmetrico di $(x, y)$ rispetto all'asse $y$.

II.

5. Supponiamo, ora, che la linea $s$ sia formata dalla porzione dell'asse $\xi$ sulla quale $\xi \geq 1$ (invece di $\xi \geq 1$ si potrebbe supporre, più generalmente, $\xi \geq a$ con $a$ costante positiva qualunque) e dalla porzione della retta $\xi = 1$ sulla quale $\eta \geq 0$, e che il punto $(x, y)$ si trovi nel quadrante $x \geq 1$, $y \geq 0$. Supporremo, inoltre, principalmente, che la formola di Riemann sia da applicarsi in quella delle quattro regioni in cui le due caratteristiche della equazione (1), uscenti dal punto $(x, y)$, dividono il precedente quadrante, che è, insieme, tutta al finito ed attraversata dalla retta $\eta = y$. Se indichiamo allora con $f(\xi)$, $f_1(\xi)$, rispettivamente, i valori che $u$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ si vuole che assumano sull'asse $\xi$; se, analogamente, indichiamo con $\varphi(\eta)$, $\varphi_1(\eta)$ i valori che $u$ e $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ devono assumere sulla retta $\xi = 1$, potremo scrivere subito le due formole che seguono e che valgono, la prima per $y > x - 1$, la seconda per $y < x - 1$:

$$(15) \qquad 2u(x, y) = \varphi(y - x + 1) + \varphi(y + x - 1) - \\ - \int_{y-x+1}^{y+x-1} \left[ \varphi(\eta)\frac{\partial z}{\partial \xi} - \varphi_1(\eta)\, z \right]_{\xi=1} d\eta\,,$$

$$(16) \qquad 2u(x, y) = f(x - y) + \varphi(x + y - 1) + \\ + \int_1^{x-y} \left[ f(\xi)\frac{\partial z}{\partial \eta} - f_1(\xi)\, z \right]_{\eta=0} d\xi - \int_0^{x+y-1} \left[ \varphi(\eta)\frac{\partial z}{\partial \xi} - \varphi_1(\eta)\, z \right]_{\xi=1} d\eta\,.$$

Per $y = x - 1$ le due formole precedenti dànno, per $u$, gli stessi valori tenendo conto delle condizioni

$$(17) \qquad \varphi(0) = f(1)\,, \quad \varphi'(0) = f_1(1)\,, \quad \varphi_1(0) = f'(1)$$

che, naturalmente, devono essere verificate. E sarebbe facile dimostrare che, allora, anche le derivate prime di $u$, rispetto ad $x$ e ad $y$, ricavate dalla (15) e dalla (16), sono continue lungo la stessa retta $y=x-1$; mentre questo cessa di essere vero per le derivate seconde e per le successive. Sicchè la (15) e la (16) devono considerarsi come due soluzioni effettivamente distinte della (1) che si saldano lungo la caratteristica della stessa equazione, $y=x-1$.

Dalla (15), e dalla formola che si ottiene derivando la stessa (15) rispetto ad $x$, si ricava subito che $u$ e $\frac{\partial u}{\partial x}$ tendono, per $x=1$, effettivamente ai valori ad essi assegnati, $\varphi$ e $\varphi_1$. Invece, dalla (16) e dalla

$$
(18)\qquad 2\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-f'(x-y)+\varphi'(x+y-1)-
$$
$$
-\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}\frac{y}{x(x-y)}f(x-y)+f_1(x-y)+
$$
$$
+\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}\frac{x-1}{x}\varphi(x+y-1)+\varphi_1(x+y-1)-
$$
$$
-\int_1^{x-y}\left[f(\xi)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+f_1(\xi)\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{\eta=0}d\xi-
$$
$$
-\int_0^{x+y-1}\left[\varphi(\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial y}-\varphi_1(\eta)\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{\xi=1}d\eta
$$

che si ottiene derivando la (16) rispetto ad $y$, si deduce che, se si vuole che anche $u$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ convergano sull'asse $\xi$ ai valori $f(x)$, $f_1(x)$ ad esse assegnati, occorre che $f$ ed $f_1$ sieno legate a $\varphi$ e $\varphi_1$ dalle relazioni integrali

$$
(19)\quad\left\{\begin{aligned}
f(x)&=\varphi(x-1)-\int_1^x f_1(\xi)\,z_{\eta=y=0}\,d\xi-\\
&\qquad-\int_0^{x-1}\left[\varphi(\eta)\frac{\partial z}{\partial\xi}-\varphi_1(\eta)\,z\right]_{\xi=1,\,y=0}d\eta,\\
f_1(x)&=-f'(x)+\varphi'(x-1)+\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}\frac{x-1}{x}\varphi(x-1)+\varphi_1(x-1)-\\
&\qquad-\int_1^x f(\xi)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\eta=y=0}d\xi-\int_0^{x-1}\left[\varphi(\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial y}-\varphi_1(\eta)\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{\xi=1,\,y=0}d\eta.
\end{aligned}\right.
$$

La prima di queste equazioni determina la funzione $f(x)$ se è data, oltre a $\varphi$ e $\varphi_1$, anche $f_1(x)$; la seconda, invece, determina $f_1$ se, oltre a $\varphi$

e $\varphi_1$, è data $f$. Ma è noto che, assegnate $\varphi$ e $\varphi_1$, delle due funzioni $f$ ed $f_1$, una sola si può dare ad arbitrio e che, allora, la soluzione della (1) è determinata e si può costruire; le due equazioni (19) devono, dunque, ridursi una all'altra. Possiamo, quindi, data $f$ o $f_1$, determinare $f_1$ o $f$, dall'una o dall'altra delle (19). Se, in particolare, supponiamo che sia identicamente $\varphi = \varphi_1 = 0$, per le (17) dev'essere

$$(17') \qquad f(1) = 0 \quad , \quad f_1(1) = 0 \quad , \quad f'(1) = 0 \, ,$$

e le (19) ci dànno

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_1^\infty f_1(\xi)\, \mathrm{F}\left[-\lambda\, , \lambda+1\, , 1\, , -\frac{(\xi-x)^2}{4\xi x}\right] d\xi = -f(x)\, , \\ \displaystyle f_1(x) = -f'(x) - \int_1^\infty f(\xi)\, \mathrm{F}'\left[-\lambda\, , \lambda+1\, , 1\, , -\frac{(\xi-x)^2}{4\xi x}\right] \frac{d\xi}{2x\xi}\, . \end{cases}$$

In queste formole abbiamo espresso $z$ per mezzo della corrispondente funzione ipergeometrica, ed F' indica la derivata di F rispetto al quarto argomento. La prima delle (I) è un'equazione integrale di cui la seconda dà la soluzione.

6. Se teniamo presente che, delle quattro funzioni $\varphi$, $\varphi_1$, $f$, $f_1$, si possono dare ad arbitrio tre qualunque di esse, sorge la questione più generale di determinare allora la quarta dall'una o dall'altra delle (19). Quando l'incognita è $\varphi$ o $\varphi_1$, questa si può determinare risolvendo un'equazione integrale che ci può essere offerta, indifferentemente, dall'una, o dall'altra, delle (19). È però da notare che $\varphi$ e $\varphi_1$ soddisfano anche ad altre equazioni integrali che sono da preferirsi alle prime quando si tratti di determinare una di queste due funzioni. Per determinare queste nuove equazioni, applichiamo la formola di Riemann, invece che nella regione finita del solito quadrante attraversata dalla retta $\eta = y$, in quella che è pure finita ed attraversata dalla retta $\xi = x$. Le due espressioni analitiche che ci dànno allora la soluzione richiesta della equazione (1), sono tali che, per $y = 0$, $u$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ tendono effettivamente ad $f$ ed $f_1$; mentre, affinchè $u$ e $\frac{\partial u}{\partial x}$ tendano a $\varphi$ e $\varphi_1$, per $x = 1$, devono essere soddisfatte due condizioni che si trovano in modo analogo al precedente, e sulle quali si possono pur fare considerazioni analoghe a quelle precedentemente fatte. Di queste condizioni scriveremo soltanto la prima.

$$(20) \qquad \varphi(y) = f(y+1) - \int_1^{y+1} \left[ f(\xi)\frac{\partial z}{\partial \eta} - f_1(\xi)\, z \right]_{\eta=0, x=1} d\xi \, +$$
$$+ \int_0^y \left[ \varphi(\eta) \frac{\partial z}{\partial \xi} - \varphi_1(\eta)\, z \right]_{\xi=x=1} d\eta \, .$$

Questa equazione (e analoghe conclusioni si ricaverebbero dall'altra condizione che dev'essere verificata fra le funzioni $f$, $f_1$, $\varphi$ e $\varphi_1$ e che non abbiamo scritta) mostra che, se sono date $f$, $f_1$ e $\varphi_1$, la funzione $\varphi$ si può ottenere risolvendo un'equazione della forma

$$(21)\qquad \varphi(y)+\int_0^y \varphi(\eta)\,\mathrm{F}'\left[-\lambda\,,\lambda+1\,,1\,,\frac{(y-\eta)^2}{4}\right]\frac{(y-\eta)^2}{4}\,d\eta=\Phi(y)\,,$$

mentre, se sono assegnate $f$, $f_1$ e $\varphi$, la funzione $\varphi_1$ può determinarsi come soluzione di un'equazione della forma

$$(22)\qquad \int_0^y \varphi_1(\eta)\,\mathrm{F}\left[-\lambda\,,\lambda+1\,,1\,,\frac{(y-\eta)^2}{4}\right]d\eta=\Psi(y),$$

le funzioni $\Phi$ e $\Psi$ essendo funzioni note.

I casi più semplici che possono presentarsi sono quelli in cui $\lambda$ è un numero intero positivo o negativo, nei quali casi il nucleo di ciascuna delle equazioni precedenti è un polinomio intero in $y-\eta$. Con un numero sufficientemente grande di derivazioni, la determinazione di $\varphi$ e di $\varphi_1$ si riporta alla integrazione di un'equazione lineare a coefficienti costanti. Nei casi più generali si dovrà ricorrere alla teoria generale che, per la forma speciale dei nuclei precedenti, è abbastanza semplice e nota.

## III.

7. Le nostre considerazioni ci hanno fatto scoprire un'equazione integrale di Volterra la cui risoluzione si ottiene con semplici operazioni di derivazione e di integrazione, cioè quella contenuta nella prima delle (I). Vi sono altre equazioni della stessa natura che godono di analoghe proprietà. Per lo studio di queste nuove equazioni occorre tener presenti le relazioni che legano la derivata di una serie ipergeometrica, rispetto al suo quarto argomento, con le serie ipergeometriche contigue ad essa: con quelle serie ipergeometriche, cioè, che si ottengono dalla prima aumentando, o diminuendo, di un'unità uno dei primi tre parametri da cui la serie ipergeometrica pure dipende. L'insieme di tutte queste relazioni si ottiene sistematicamente ricordando che un'equazione $\mathrm{E}(\lambda\,,\lambda')$ ammette soluzioni omogenee in $\tau$ e $\tau'$ della forma

$$\tau^m\varphi(t)\quad,\quad t=\frac{\tau'}{\tau}\,,$$

la funzione $\varphi(t)$ essendo una soluzione della equazione ipergeometrica

$$(23)\qquad t(1-t)\,\varphi''(t)+[1-m-\lambda-(1-m+\lambda')\,t]\,\varphi'(t)+m\lambda'\varphi(t)=0\,,$$

ed applicando a queste soluzioni le proprietà espresse dalle (6). Delle soluzioni dell'equazione $E(\lambda, \lambda')$ della natura indicata basta tener conto delle seguenti:

$$(24)\quad \begin{cases} \tau^m F(-m, \lambda', 1-m-\lambda, t), \\ \tau^m t^{m+\lambda} F(\lambda, \lambda+\lambda'+m, 1+m+\lambda, t), \\ \tau^m (1-t)^{1-\lambda-\lambda'} F(1-m-\lambda-\lambda', 1-\lambda, 1-m-\lambda, t), \\ \tau^m t^{m+\lambda} (1-t)^{1-\lambda-\lambda'} F(1-\lambda', 1+m, 1+m+\lambda, t). \end{cases}$$

E si noti che le funzioni ipergeometriche che compaiono nelle (24) dipendono da tre costanti arbitrarie, $m, \lambda, \lambda'$, le quali si possono determinare sempre in modo che i tre primi parametri, da cui ogni serie ipergeometrica dipende, acquistino valori dati $\alpha, \beta, \gamma$. Se indichiamo ora con $F$ una serie ipergeometrica della variabile $t$ costruita con i primi tre parametri $\alpha$, $\beta, \gamma$, e, se indichiamo con $F_{\alpha+}, F_{\alpha-}, F_{\gamma+}, F_{\gamma-}$ le serie ipergeometriche che si ottengono da $F$ aumentando, o diminuendo, di un'unità i parametri $\alpha$ e $\gamma$, le relazioni accennate si scrivono

$$(25)\quad \begin{cases} \alpha F + tF' = \alpha F_{\alpha+}, \\ (\gamma-1) F + tF' = (\gamma-1) F_{\gamma-}, \\ \gamma(\gamma-\alpha-\beta) F + \gamma(1-t) F' = (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) F_{\gamma+}, \\ (\alpha-\gamma+\beta t) F - t(1-t) F' = (\alpha-\gamma) F_{\alpha-}. \end{cases}$$

Le serie ipergeometriche che compaiono nella nostra quistione sono tali che, per esse, $\alpha+\beta=1$, $\alpha=-\lambda$. Se indichiamo con $F_\gamma(t)$ quella di tali serie in cui $\gamma$ è il terzo parametro e $t$ la variabile, in conseguenza della terza delle (25), potremo scrivere la relazione

$$(25')\qquad (1-t) F_1'(t) = -\lambda(\lambda+1) F_2(t).$$

8. Conviene anche notare che la coesistenza delle due equazioni (I) richiede che sia

$$(26)\qquad \frac{1}{2}\int_\xi^x F_1\left[-\frac{(\xi-\xi_1)^2}{4\xi\xi_1}\right] F_1'\left[-\frac{(\xi_1-x)^2}{4\xi_1 x}\right]\frac{d\xi_1}{\xi_1} =$$

$$= -x\frac{\partial}{\partial x} F_1\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4x\xi}\right] = \xi\frac{\partial}{\partial\xi} F_1\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4x\xi}\right],$$

formola che è solo un caso particolare di un'altra alla quale, in questa Nota, ci contentiamo di accennare.

## IV.

9. In questa Nota vogliamo ancora soltanto servirci dei risultati precedenti per trovare la soluzione dell'equazione integrale

$$\text{(II)} \quad \int_1^x f(\xi)\, F_2(\sigma) \frac{d\xi}{(x+\xi)^2} = \frac{1}{2\lambda(\lambda+1)} \Phi(x) \quad , \quad \sigma = -\frac{(x-\xi)^2}{4x\xi}$$

che incontreremo nel seguito delle nostre ricerche e nella quale $\Phi(x)$ è una funzione data che, naturalmente, si annulla per $x = 1$.

L'equazione (II), a causa della (25'), si può scrivere

$$\text{(II')} \qquad \int_1^x f(\xi)\, F_1'(\sigma) \frac{d\xi}{2x\xi} = \Phi(x) .$$

E, per determinare $f(x)$ da questa equazione, cambiamo, in essa, $x$ in $\xi_1$, quindi moltiplichiamola per $F_1\left[-\frac{(x-\xi_1)^2}{4x\xi_1}\right]$ ed integriamo, poi, rispetto a $\xi_1$, da 1 ad $x$. Tenendo conto della (26), si ricavano subito le due relazioni

$$\text{(27)} \begin{cases} \displaystyle\int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi} \frac{\partial}{\partial x} F_1(\sigma)\, d\xi = \frac{1}{x} \int_1^x \Phi(\xi)\, F_1(\sigma)\, d\xi , \\ \displaystyle\int_1^x f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} F_1(\sigma)\, d\xi = \int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi} F_1'(\sigma) \frac{x^2-\xi^2}{4x\xi}\, d\xi = -\int_1^x \Phi(\xi)\, F_1(\sigma)\, d\xi . \end{cases}$$

Da queste se ne ricavano altre due integrando la prima, rispetto ad $x$, da 1 ad $x$, ed eseguendo sulla seconda l'operazione $D = x \frac{\partial}{\partial x}$: vogliam dire le due equazioni

$$\text{(28)} \begin{cases} \displaystyle\int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi} F_1(\sigma)\, d\xi - \bar{f}(x) = \int_1^x \frac{d\xi_1}{\xi_1} \int_1^{\xi_1} \Phi(\xi)\, F_1\left[-\frac{(\xi_1-\xi)^2}{4\xi_1\xi}\right] d\xi , \\ \displaystyle\int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi} \left\{\sigma(1-\sigma)\, F_1''(\sigma) + \tfrac{1}{2}(1-2\sigma)\, F_1'(\sigma)\right\} d\xi = -D \int_1^x \Phi(\xi)\, F_1(\sigma)\, d\xi \end{cases}$$

in cui si è posto

$$\text{(28')} \qquad \bar{f}(\xi) = \int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi}\, d\xi .$$

L'ultima delle (28), a causa della prima di esse e dell'equazione differenziale a cui soddisfa $F_1(\sigma)$, dà luogo all'altra

$$(29)\qquad \int_1^\infty \frac{f(\xi)}{\xi} F_1'(\sigma) \frac{x^2+\xi^2}{4x\xi} d\xi = -\lambda(\lambda+1)\bar{f}(x) -$$

$$-\lambda(\lambda+1)\int_1^\infty \frac{d\xi_1}{\xi_1}\int_1^{\xi_1} \Phi(\xi)\, F_1\left[-\frac{(\xi_1-\xi)^2}{4\xi_1\xi}\right] d\xi + D\int_1^\infty \Phi(\xi)\, F_1(\sigma)\, d\xi .$$

Da questa equazione e dalla seconda delle (27), sommando e sottraendo, si ricavano ancora le due equazioni seguenti:

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2\int_1^\infty \frac{f(\xi)}{\xi} F_1'(\sigma) \frac{d\xi}{2x\xi} = -\lambda(\lambda+1)\bar{f}(x) - \\ & \qquad -\lambda(\lambda+1)\int_1^\infty \frac{d\xi_1}{\xi_1}\int_1^{\xi_1} \Phi(\xi)\, F_1\left[-\frac{(\xi_1-\xi)^2}{4\xi_1\xi}\right] d\xi + \\ & \qquad + (D-1)\int_1^\infty \Phi(\xi)\, F_1(\sigma)\, d\xi , \\ & \int_1^\infty \xi f(\xi)\, F_1'(\sigma) \frac{d\xi}{2x\xi} = -\lambda(\lambda+1)\bar{f}(x) + \Phi_1(x) , \end{aligned}\right.$$

convenendo di porre, per comodità e brevità,

$$(30')\quad \Phi_1(x) = -\lambda(\lambda+1)\int_1^\infty \frac{d\xi_1}{\xi_1}\int_1^{\xi_1} \Phi(\xi)\, F_1\left[-\frac{(\xi_1-\xi)^2}{4\xi_1\xi}\right] d\xi + $$

$$+ (D+1)\int_1^\infty \Phi(\xi)\, F_1(\sigma)\, d\xi .$$

L'ultima delle (30) ha la stessa forma della (II'), salvo per l'espressione del secondo membro e perchè, nel primo, vi compare $\xi f(\xi)$ al posto di $f(\xi)$. Partendo, dunque, dalla seconda delle (30), si potranno ricavare due nuove equazioni le quali staranno ad essa nella stessa relazione in cui la prima delle (28) e la prima delle (30) stanno con la (II'). Queste due equazioni si possono scrivere subito. Ed eseguendo, su ciascuna di esse, l'operazione D; quindi servendoci, per la prima, della identità

$$(31)\qquad (D-1)\int_1^\infty \bar{f}(\xi)\, F_1(\sigma)\, d\xi = \int_1^\infty f(\xi)\, F_1(\sigma)\, d\xi ,$$

e, per la seconda, della (II'), esse potranno porsi sotto la forma

$$
(32)\quad \begin{cases}
[D(D-1)+\lambda(\lambda+1)]\int_1^x f(\xi)\, F_1(\sigma)\, d\xi - \\
\qquad\qquad - xf(x) = \int_1^x \Phi_1(\xi)\, F_1(\sigma)\, d\xi\,, \\
[D(D-1)-\lambda(\lambda+1)]\int_1^x \bar{f}(\xi)\, F_1(\sigma)\, d\xi + \\
\qquad\qquad + xf(x) = -\dfrac{1}{\lambda(\lambda+1)}\, D[x^2\Phi(x)] + \\
\qquad + \dfrac{1}{\lambda(\lambda+1)}[D(D-1)-\lambda(\lambda+1)]\int_1^x \Phi_1(\xi)\, F_1(\sigma)\, d\xi\,.
\end{cases}
$$

Eseguendo sulla prima l'operazione $D(D-1)-\lambda(\lambda+1)$, sulla seconda l'operazione $D(D-1)+\lambda(\lambda+1)$; quindi, sottraendo la prima dalla seconda, si trova

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{III})\quad 2\lambda(\lambda+1)\, xf(x) = {} & [D(D-1)-\lambda(\lambda+1)]\int_1^x \Phi_1(\xi)\, F_1(\sigma)\, d\xi - \\
& -[D(D-1)+\lambda(\lambda+1)]\left[x\int_1^x \Phi(\xi)\, d\xi\right] - \\
& -4\,[4\,\Phi'(1)+\Phi''(1)]\,(x-1)-4\,\Phi'(1)\,.
\end{aligned}
$$

## Mineralogia. — *Blödite ed altri minerali del giacimento salifero di monte Sambuco in territorio di Calascibetta (Sicilia).* Nota del Corrisp. F. MILLOSEVICH.

Campioni del minerale del nuovo giacimento salifero esplorato da circa un paio d'anni in regione monte Sambuco, nel territorio di Calascibetta (prov. di Caltanissetta), mi furono recentemente dati in esame dal prof. E. Paternò, cui mi è grato porgere i dovuti ringraziamenti per avermi in tal modo offerto occasione di compiere le osservazioni che intendo riassumere in questa ed eventualmente in altre note.

Non avendo osservato sul luogo il giacimento, mi astengo dal darne una descrizione e mi limito ad alcuni particolari, di puro interesse mineralogico.

La massa salifera che si trova nelle argille, di età tortoniana secondo alcuni, o più recenti secondo altri geologi [1], fu esplorata sino ad ora con tre gallerie a diverso livello, sempre sullo stesso versante meridionale del monte Sambuco. La galleria superiore taglia un deposito di una specie di

[1] Vedi: Seguenza L., *I giacimenti di salgemma in Sicilia e la loro età geologica* (R. Acc. peloritana, Messina, *19*, 1905); Cruciani A., *Contributo allo studio geologico dei giacimenti di salgemma della Sicilia* (Rass. industria solfifera, Caltanissetta 1908).