ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

proposto, e giustamente, l'eliminazione del nome *simonyite* dato da Tschermack ad un minerale del demanio salino austriaco di Hallstadt concludendo per la sua identità con l'astrakanite, senza peraltro far menzione che già dal 1871 Groth ed Hintze avevano concluso per la identità della simonyite e della blödite, trascurando così l'occasione di dimostrare l'identità delle tre specie e di proporre il nome da preferire, Il quale dovrebbe essere per diritto di priorità quello di blödite dato da John [1] nel 1821, ammenochè, come sembra essere il parere di Bücking il quale parla di roccia astrakanitica e di cristalli di blödite, non si voglia adottare il nome di astrakanite in senso di roccia, cioè del materiale che forma banchi o membri distinti nelle serie salifere o depositi estesi e potenti come quelli dei laghi salati della steppa di Astrakan, riservando il nome di blödite alla specie nello stretto senso mineralogico.

Nella massa del banco astrakanitico della galleria superiore di monte Sambuco si trovano in copia noccioli tondeggianti, dalla grandezza di un pisello sino a quella di un arancio, di un materiale bianco candido a finissima struttura granulare saccaroide, parzialmente deliquescente all'aria umida, perfettamente somiglianti a quelli consimili di boracite compatta (*stassfurtite*), che si rinvengono nei giacimenti di Stassfurt entro la carnallite. Saggi qualitativi indicano che effettivamente fra i componenti di questi noccioli sono acido borico, magnesia e cloro. Sulla loro esatta composizione intendo tornare prossimamente, dopo ultimata una completa analisi che sto eseguendo.

Matematica. — *Le trasformazioni puntuali fra varietà che conservano il parallelismo di Levi-Civita.* Nota di E. Bompiani, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

1. Data una V_n, definita intrinsecamente dal suo

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n}{}_{1} a_{ik}(x_1, \dots, x_n)\, dx_i\, dx_k, \tag{1}$$

il prof. Levi-Civita ha introdotto su di essa la nozione di parallelismo [2] che, nella forma intrinseca osservata dal prof. Severi [3], può esprimersi così:

In un punto P di una curva (*di trasporto*) c (di V_n) è dato un elemento lineare arbitrario l (di V_n); si consideri la superficie geodetica (di

[1] Chem. Schriften, *6*, 1821, pag. 240.

[2] *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque* ecc. (Circolo Matematico di Palermo, tomo 42, 1917).

[3] *Sulla curvatura delle superficie e varietà* (ibidem). Per un'altra definizione del parallelismo, che non fa uso della proprietà integrale delle geodetiche, cfr. H. Weyl, *Raum. Zeit. Materie* (Berlin, Springer 1919, Cap. II, § 14).

V_n in P) definita da l e dall'elemento lineare PP′ di c; l'elemento lineare l', uscente da P′ sulla superficie geodetica e formante ivi con la geodetica determinata da PP′ lo stesso angolo che l forma in P con c, si dice *parallela* ad l in P′ secondo c; con un processo d'integrazione risulta definita la parallela ad l secondo c in un punto qualunque di questa curva.

Una trasformazione puntuale (generalmente biunivoca) di una V_n in V'_n non è in generale siffatta che a direzioni parallele in V_n corrispondano direzioni parallele in V'_n: nasce quindi il problema di individuare quelle trasformazioni che conservano il parallelismo.

Per la proprietà caratteristica delle geodetiche di avere tutte le tangenti fra loro parallele (quando sia curva di trasporto la geodetica stessa), le trasformazioni in esame sono certamente geodetiche; quindi è chiaro che i mezzi per questa ricerca debbono attingersi dalla Memoria del prof. Levi-Civita, *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche* (¹), ove sono determinati i tipi di ds^2 che ammettono trasformazioni geodetiche (che non siano semplicemente prodotti di una isometria per una similitudine).

2. Indichiamo con $\xi^{(i)} = \frac{\partial x_i}{\partial s}$ i parametri della direzione da trasportare, con d la differenziazione da eseguire lungo la curva di trasporto in V_n; aggiungiamo un apice alle grandezze corrispondenti relative alla varietà trasformata V'_n.

Poniamo

$$\xi'^{(i)}/\xi^{(i)} = \frac{\partial x_i}{\partial s'} : \frac{\partial x_i}{\partial s} = \frac{\partial s}{\partial s'} = e^{\lambda},$$

λ essendo funzione del posto e della direzione ∂ che si trasporta.

Il trasporto per parallelismo è regolato dalle equazioni

in V_n:
$$d\xi^{(i)} = -\sum_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\} \xi^{(j)}\, dx_l$$

in V'_n:
$$d\xi'^{(i)} = -\sum_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\}' \xi'^{(j)}\, dx_l\,.$$

Utilizzando la posizione fatta, nella ipotesi di conservazione del parallelismo si ha

$$\xi^{(i)}\, d\lambda + \sum_{jl} \left(\left\{ {jl \atop i} \right\}' - \left\{ {jl \atop i} \right\} \right) \xi^{(j)}\, dx_l = 0\,.$$

Osserviamo subito che $d\lambda = 0$: infatti, detto ∂s l'elemento lineare da trasportare e ∂s^* l'elemento lineare d'arrivo dopo un cammino qualsiasi, si ha, per il parallelismo, $\partial s = \partial s^*$; e poichè ad elementi paralleli in V_n

(¹) Annali di Matematica, ser. II, tomo XXIV (1896), pp. 255-300.

corrispondono elementi paralleli in V'_n si avrà pure $\delta s' = \delta s'^{*}$, cioè $\delta s/\delta s' = \delta s^{*}/\delta s'^{*}$, quindi λ non varia per il trasporto eseguito, $d\lambda = 0$. Dalle ultime equazioni, per l'arbitrarietà della direzione di trasporto (cioè delle dx_i) e della direzione da trasportare (cioè delle δx_i) si ha $\left\{ {jl \atop i} \right\}' = \left\{ {jl \atop i} \right\}$ per j, l, i qualsiansi.

3. Siamo dunque condotti a caratterizzare quelle trasformazioni della forma (1) nelle quali sono invarianti tutti i simboli di Christoffel di 2ª specie.

Indicando con a il discriminante della (1) e con a' quello della trasformata, dalle note identità

$$\sum_k \left\{ {ki \atop k} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log a}{\partial x_i}$$

segue, per l'identità dei simboli $\{\,\}$ e $\{\,\}'$,

$$\sum_k \left(\left\{ {ki \atop k} \right\} - \left\{ {ki \atop k} \right\}' \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \log \frac{a}{a'} = 0,$$

cioè $a/a' =$ costante $(\neq 0)$; poichè una costante moltiplicativa del ds è inessenziale per il problema potrebbe prendersi $a = a'$; segue pure che il sistema derivato covariante del sistema a'_{rs} rispetto alla (1) è identicamente nullo [1].

4. Il procedimento del Levi-Civita [2] conduce a studiare le radici dell'equazione in ϱ ottenuta annullando il determinante delle $a'_{rs} - \varrho a_{rs}$ e a dividere la ricerca in tanti tipi quanti sono i possibili casi di distribuzione delle radici stesse in rapporto alle loro molteplicità. Se si chiamano $\varrho_{p_1}, \dots, \varrho_{p_{n-m+1}}$ $(p_{n-m+1} = n)$ le $n - m + 1$ radici distinte, supposti gli indici $p_1, p_2, \dots, p_{n-m+1}$ disposti in ordine crescente e in modo che $\varepsilon_l = p_l - p_{l-1}$ $(p_0 = 0)$ rappresenti l'ordine di molteplicità della radice ϱ_{p_l}, i due ds^2 in

(1) Ciò segue dal lemma di Ricci applicato alla $\Sigma a'_{rs} dx_r dx_s$ e dall'essere $\{\,\} = \{\,\}'$; ma si ricava anche subito dalle equazioni (13) della Memoria *Sulle trasformazioni* ecc., quando vi si faccia $\mu = C \left(\frac{a}{a'} \right)^{\frac{1}{n+1}} =$ costante. Il sistema a'_{rs} che qui si determina è un sistema doppio covariante *simmetrico* a sistema derivato nullo: per il caso di una forma *binaria* la determinazione dei sistemi doppi covarianti a sistema derivato nullo è stata fatta dal Cecconi (Atti Istit. Veneto, tomo LXXII, pag. 1435); per una superficie a curvatura non nulla e per sistemi doppi simmetrici si ha necessariamente $a'_{rs} = c a_{rs}$, d'accordo con quanto segue.

(2) Nella Memoria già citata, che qui riassumo solo in quanto è necessario per rendere intelligibili le notazioni; vedasi anche Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* (Math. Ann., LIV Bd., 1900), Ch. V, § 4.

corrispondenza geodetica assumono la forma

$$ds^2 = \sum_{1}^{n-m+1}{}_l \prod_{1}^{n-m+1}{}_j' \, |\psi_{p_j} - \psi_{p_l}| \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{r,s} k_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

$$ds'^2 = \frac{C}{(\psi_{p_1}+c)\dots(\psi_{p_{n-m+1}}+c)} \sum_{1}^{n-m+1}{}_l \frac{1}{\psi_{p_l}+c} \prod_{1}^{n-m+1}{}_j' \, |\psi_p - \psi_{p_l}| \times$$

$$\times \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{r,s} k_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

ove C e c sono due costanti arbitrarie; ψ_h è funzione della sola x_h se ϱ_h è radice semplice, mentre è una costante ($\neq 0$) nel caso opposto; $\Sigma_{rs} k_{rs}\, dx_r\, dx_s$ è una forma differenziale positiva a soli ε_l argomenti; e infine $\Pi_j' \,|\psi_{p_j} - \psi_{p_l}|$ indica il prodotto degli argomenti indicati per $j \neq l$.

Nel nostro caso, per essere $a/a' = \text{cost.}$, risulta [1] che *tutte le ψ_h sono costanti* (fra loro differenti); sicchè, liberati da coefficienti costanti inessenziali, gli elementi lineari corrispondenti si scrivono

$$ds^2 = \sum_{1}^{n-m+1}{}_l \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{rs} k_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

$$ds'^2 = \sum_{1}^{n-m+1}{}_l \frac{1}{\psi_{p_l}} \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{rs} k_{rs}\, dx_r\, dx_s\,.$$

5. Il risultato diviene geometricamente evidente se si cerca di realizzare questi elementi lineari in un ambiente euclideo.

Si costruisca per ogni valore di l una V_{ε_l}, che diremo σ_l, avente l'elemento lineare dato da $ds^2_{(l)} = \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{r,s} k_{rs}\, dx_r\, dx_s$, entro uno spazio euclideo $S_{(l)}$ $\left(\text{la cui dimensione sarà al massimo } (l) = \frac{\varepsilon_l(\varepsilon_l+1)}{2}\right)$. Disponiamo questi $S_{(l)}$ entro uno $S_{(1)+(2)+\dots+(n-m+1)}$ in modo ch'essi abbiano un punto comune per cui passino tutte le σ_l e risultino a due a due ortogonali. Teniamo fisso $S_{(1)}$ e spostiamo $S_{(2)}$ parallelamente a se stesso (quindi ortogonalmente a $S_{(1)}$) in $S_{(1)+(2)}$, trascinando seco σ_2 in modo che il punto fissato su σ_2 descriva tutta la σ_1: si ha una $V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$ che risulta di traslazione, sia rispetto a σ_2 sia a σ_1. Poi spostiamo $S_{(3)}$, con entro σ_3, in modo che il punto fissato su σ_3 descriva la $V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$ e si avrà una $V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}$; e così

[1] Dalle equazioni (E) (24) in *Sulle trasformazioni* ecc., oppure E) d) in *Méthodes* ecc., quando vi si faccia $\mu = \text{cost}$.

di seguito, fino ad ottenere una $V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{n-m+1}} = V_n$: essa realizza il primo ds^2 (1).

Se ora applichiamo una similitudine, con rapporto d'ingrandimento $\sqrt{1/\psi_l}$ secondo la giacitura di $S_{(l)}$, cioè applichiamo all'ambiente della V_n un'affinità speciale avente come giaciture di punti uniti quelle degli $S_{(l)}$, otteniamo la più generale trasformata per parallelismo di Levi-Civita della V_n data (a meno di una isometria).

Se tutte le ϱ fossero coincidenti (come avviene per una V_n generale), i due ds^2 non differirebbero se non per un fattore (cioè le due V_n per una similitudine dell'ambiente); se tutte le ϱ fossero distinte (quindi $\varepsilon_l = 1$, $(l) = 1$) la V_n sarebbe euclidea, e la trasformazione si riduce, come deve, ad una affinità.

È poi evidente, sul modello costruito, che le V_{ε_l} sono *totalmente geodetiche* entro V_n.

Matematica. — *Sulle varietà che ammettono una traslazione infinitesima*. Nota di O. ONICESCU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Supponiamo che una varietà V_n, di elemento lineare

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k ,$$

ammetta un movimento rigido lungo una congruenza di linee [C]. Se

$$X(f) = \sum \xi^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

è la trasformazione infinitesima del movimento, le $\xi^{(i)}$ sono, con le notazioni del calcolo differenziale assoluto, proporzionali ai parametri controvarianti delle linee della congruenza [C]: indicherò questi parametri con $\lambda_n^{(i)}$, l'indice n alludendo al proposito di considerare quanto prima assieme a [C] altre $n-1$ congruenze ad essa ortogonali.

Si sa che le $\xi^{(i)}$ devono soddisfare alle equazioni di Killing, le quali con le notazioni che adoperiamo si scrivono

$$\xi_{ij} + \xi_{ji} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

(1) La sua classe (secondo il Ricci) è quindi

$$= (1) + (2) + \cdots + (n-m+1) \leq \sum_l \frac{\varepsilon_l(\varepsilon_l - 1)}{2} .$$