ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

di seguito, fino ad ottenere una $V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{n-m+1}} = V_n$: essa realizza il primo ds^2 (¹).

Se ora applichiamo una similitudine, con rapporto d'ingrandimento $\sqrt{1/\psi_l}$ secondo la giacitura di $S_{(l)}$, cioè applichiamo all'ambiente della V_n un'affinità speciale avente come giaciture di punti uniti quelle degli $S_{(l)}$, otteniamo la più generale trasformata per parallelismo di Levi-Civita della V_n data (a meno di una isometria).

Se tutte le ϱ fossero coincidenti (come avviene per una V_n generale), i due ds^2 non differirebbero se non per un fattore (cioè le due V_n per una similitudine dell'ambiente); se tutte le ϱ fossero distinte (quindi $\varepsilon_l = 1$, $(l) = 1$) la V_n sarebbe euclidea, e la trasformazione si riduce, come deve, ad una affinità.

È poi evidente, sul modello costruito, che le V_{ε_l} sono *totalmente geodetiche* entro V_n.

Matematica. — *Sulle varietà che ammettono una traslazione infinitesima.* Nota di O. ONICESCU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Supponiamo che una varietà V_n, di elemento lineare

$$ds^2 = \sum_1^n {}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,,$$

ammetta un movimento rigido lungo una congruenza di linee [C]. Se

$$X(f) = \sum \xi^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

è la trasformazione infinitesima del movimento, le $\xi^{(i)}$ sono, con le notazioni del calcolo differenziale assoluto, proporzionali ai parametri controvarianti delle linee della congruenza [C]: indicherò questi parametri con $\lambda_n^{(i)}$, l'indice n alludendo al proposito di considerare quanto prima assieme a [C] altre $n-1$ congruenze ad essa ortogonali.

Si sa che le $\xi^{(i)}$ devono soddisfare alle equazioni di Killing, le quali con le notazioni che adoperiamo si scrivono

$$(1) \qquad \xi_{ij} + \xi_{ji} = 0 \qquad (i\,, j = 1\,, 2\,, \ldots, n)\,.$$

(¹) La sua classe (secondo il Ricci) è quindi

$$= (1) + (2) + \cdots + (n-m+1) \leq \sum_l \frac{\varepsilon_l(\varepsilon_l - 1)}{2}\,.$$

Esprimendo le ξ_i sotto forma canonica

$$\xi_i = \varrho\, \lambda_{n/i}$$

con che ϱ *rappresenta l'ampiezza dello spostamento rigido considerato*, le equazioni (1) diventano

$$\lambda_{n/ij} + \lambda_{n/ji} = \mu_i\, \lambda_{n/j} + \mu_j\, \lambda_{n/i} \tag{2}$$

nelle quali $\mu = \log \varrho^{-1}$.

2. Ciò premesso, proponiamoci di ricercare a quali condizioni debba ottemperare la [C], e, se del caso, addirittura la metrica della varietà V_n, perchè il movimento rigido infinitesimo (nel quale ogni punto si sposta di ϱ lungo la linea C che passa per esso) abbia *carattere traslatorio*, nel senso che: la corrispondenza delle direzioni (uscenti da un punto generico prima e dopo lo spostamento rigido) debba ridursi ad un semplice trasporto per parallelismo (di Levi-Civita) lungo le linee C. Notiamo subito che questa definizione di spostamento traslatorio è assai più completa (e quindi più restrittiva) di quella concernente soltanto l'eguaglianza delle ampiezze per ogni punto ($\varrho = d$) con cui si caratterizzano i così detti scorrimenti [1]. Vedremo che alle nostre traslazioni infinitesime competono proprio tutte le proprietà delle traslazioni dell'ordinario spazio euclideo, compresa la costanza dell'ampiezza.

3. Per la trattazione matematica della questione conviene in primo luogo associare alla congruenza [C] altre $n-1$ congruenze ortogonali tra loro e a [C], per formare una n-upla ortogonale caratterizzata dai sistemi covarianti $\lambda_{h/i}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$.

Denotiamo col simbolo d l'incremento (di una generica funzione del posto) dovuto al movimento rigido elementare, con δ l'incremento corrispondente ad uno spostamento elementare con parallelismo di Levi-Civita, e ricordiamo che, lungo una linea di elemento lineare δs_n, quest'ultimo incremento è definito dalle formole [2]

$$\frac{\delta \lambda_i}{\delta s_n} = \sum_1^n {}_{jl} \left\{ \begin{matrix} i\,j \\ l \end{matrix} \right\} \lambda_l\, \lambda_n^{(j)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

4. L'equivalenza del movimento rigido con lo spostamento, a parallelismo, di una direzione qualunque λ_i, lungo la linea C, si scrive

$$d\lambda_i = \delta\lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

(1) Cfr. L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui di trasformazioni* [Pisa, Spoerri, 1918], § 183.

(2) T. Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XLII, 1917, pp. 173-204] § 5.

In base alla formola precedente, ed osservando che $\frac{dx_j}{ds_n} = \lambda_n^{(j)}$, questa equivalenza assume l'espressione

$$\sum_1^n {}_j \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} \lambda_n^{(j)} = \sum_1^n {}_{jl} \left\{ \begin{matrix} i\ j \\ l \end{matrix} \right\} \lambda_l \lambda_n^{(j)} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ove si ricordi la formola di derivazione covariante

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} - \sum_1^n {}_l \left\{ \begin{matrix} i\ j \\ l \end{matrix} \right\} \lambda_l$$

si ha più semplicemente

$$\text{(3)} \qquad \sum_1^n {}_j \lambda_n^{(j)} \lambda_{ij} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

È evidentemente sufficiente che le (3) siano soddisfatte per una direzione qualunque $\lambda_{h/i}$ della n-upla ortogonale, ciò che dà le equazioni

$$\text{(4)} \qquad \sum_1^n {}_j \lambda_n^{(j)} \lambda_{h/ij} = 0 \qquad (h, i = 1, 2, \dots, n)$$

che esprimono le condizioni necessarie e sufficienti perchè il movimento, che supponiamo rigido, avvenga con parallelismo. Per ottenere equazioni invarianti, moltiplichiamo i primi membri in (4) per $\lambda_k^{(i)}$ e sommiamo, ciò che dà

$$\sum_1^n {}_{ij} \lambda_k^{(i)} \lambda_n^{(j)} \lambda_{h/ij} = 0 \qquad (k, h = 1, 2, \dots, n).$$

Il primo membro rappresenta (¹) il coefficiente di rotazione γ_{hkn} ed abbiamo quindi in forma più comprensiva

$$\text{(A)} \qquad \gamma_{hkn} = 0 \qquad (k, h = 1, 2, \dots, n).$$

Per $h = n$ e k arbitrario si ha in primo luogo

$$\text{(5)} \qquad \gamma_{nkn} = 0 ;$$

dunque si ha che *le linee* C *sono geodetiche* (²).

Per $h \neq k \neq n$ le (A) esprimono che la *rotazione durante il movimento è nulla*.

5. Esaminiamo adesso più da vicino le conseguenze portate dalle equazioni di Killing, tenendo conto dei risultati precedenti, compendiati nelle (A).

(¹) G. Ricci e T. Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu* [Mathematische Annalen, Bd. 53, 1901], pag. 148.

(²) La stessa Memoria, pag. 154.

Moltiplicando le (2) per $\lambda_h^{(i)}\lambda_k^{(j)}$ e sommando rispetto ad i e j, ove si tengano ancora presenti le definizioni dei coefficienti di rotazione γ, si ha:

$$(6) \qquad \sum_1^n{}_{ij}\, \lambda_k^{(j)}\lambda_h^{(i)}(\mu_i\lambda_{n/j}+\mu_j\lambda_{n/i})=\gamma_{nhk}+\gamma_{nkh} \qquad (h\,,k=1\,,2\,,\ldots,n).$$

Per $h\,,k\neq n$ il primo membro si annulla identicamente; dunque

$$\gamma_{nhk}+\gamma_{nkh}=0 \qquad h\,,k\neq n\,,$$

relazioni di cui il significato è che: *le $n-1$ congruenze associate a* [C] *costituiscono un sistema canonico* (*e ciò comunque si scelgano le congruenze stesse*).

In virtù delle (5) abbiamo $\gamma_{nhn}=0$; dunque, per $k=n$, le (6) diventano

$$\sum_1^n{}_i\, \lambda_h^{(i)}\mu_i=0 \qquad (h=1\,,2\,,\ldots,n)$$

Ne consegue $\varrho=\text{cost.}$, donde l'annunciata proprietà delle traslazioni *di far subire, a tutti i punti, spostamenti di eguale ampiezza* (*cioè di entrare fra gli scorrimenti*).

Le (6) si riducono così alla forma

$$(\text{B}) \qquad \gamma_{nhk}+\gamma_{nkh}=0 \qquad (h\,,k=1\,,2\,,\ldots,n)$$

e insieme alle (A) porgono le condizioni necessarie e sufficienti perchè la congruenza [C] sia costituita da traiettorie di un moto rigido traslatorio.

6. Per esaurire rapidamente la discussione del sistema (A), (B), giova trar partito dalla circostanza che possiamo sempre dare alla trasformazione infinitesimale la forma $X(f)=\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$.

Questo implica $\xi^{(i)}=0$ per $i<n$, $\xi^{(n)}=1$, ossia

$$(7) \qquad \lambda_n^{(i)}=0 \ \text{ per } \ i<n\,, \ \text{ e } \ \lambda_n^{(n)}=\frac{1}{\varrho}\,,$$

che in base ai risultati precedenti è una costante.

Le equazioni di Killing equivalgono, in questo caso, ad avere tutte le a_{ik} indipendenti da x_n.

Dalle relazioni di ortogonalità

$$\sum_1^n{}_i\, \lambda_{k/i}\lambda_n^{(i)}=\varepsilon_{kn}\,,$$

per le (7) risulta

$$(8) \qquad \lambda_{k/n}=0 \ \text{ per } \ k<n\,, \ \text{ e } \ \lambda_{n/n}=\varrho=\text{cost.}$$

Le equazioni (4), per le stesse (7), dànno

$$\lambda_{k/in} = 0 \qquad (k, i = 1, 2, \dots, n). \tag{9}$$

Ma noi abbiamo, secondo la formola di derivazione covariante,

$$\lambda_{k/in} = \frac{\partial \lambda_{k/i}}{\partial x_n} - \sum_1^n {}_l \left\{ \begin{matrix} i\,n \\ l \end{matrix} \right\} \lambda_{k/l} \qquad (k, i = 1, 2, \dots, n).$$

Essendo i coefficienti a_{rs} indipendenti da x_n, al pari dei parametri $\lambda_n^{(i)}$, si possono ritenere indipendenti da questa variabile anche i parametri e i momenti $\lambda_k^{(i)}$, $\lambda_{k/i}$ delle altre $n-1$ congruenze che sono vincolate soltanto a costituire un'ennupla ortogonale colla [C]. Allora le (9), associate alla formola precedente, dànno

$$\sum_1^n {}_l \left\{ \begin{matrix} i\,n \\ l \end{matrix} \right\} \lambda_{k/l} = 0 \qquad (k, i = 1, 2, \dots, n). \tag{10}$$

Consideriamo adesso il coefficiente di rotazione γ_{knh}, che è, secondo una formola già citata,

$$\gamma_{knh} = \sum_1^n {}_{ij} \lambda_n^{(j)} \lambda_h^{(i)} \lambda_{k/ji},$$

e quindi, per le semplificazioni (7),

$$\gamma_{knh} = \frac{1}{\varrho} \sum_1^n {}_i \lambda_h^{(i)} \lambda_{k/ni}$$

In questa espressione si ha

$$\lambda_{k/ni} = \frac{\partial \lambda_{k/n}}{\partial x_i} - \sum_1^n {}_l \left\{ \begin{matrix} n\,i \\ l \end{matrix} \right\} \lambda_{k/l} \qquad (k, i = 1, 2, \dots, n).$$

Ma, in virtù delle (8) e (10), segue

$$\lambda_{k/ni} = 0 \qquad (k, i = 1, 2, \dots, n);$$

dunque i coefficienti di rotazione, ora considerati, si annullano. Scriveremo, cambiando i primi due indici,

$$\gamma_{nhk} = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \dots, n). \tag{11}$$

le quali mostrano in particolare che *la congruenza* [C] *è normale*. Ad esse possiamo sostituire le equivalenti

$$\lambda_{n/ij} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n). \tag{11'}$$

Ci troviamo oramai nelle condizioni incontrate dal prof. Levi-Civita [1] per le congruenze a parallelismo completo.

[1] § 14 della citata Memoria sul parallelismo.

Beneficiando della conclusione di quella ricerca, possiamo concludere noi stessi: Perchè una varietà ammetta una traslazione elementare, nel senso sopra definito, è *necessario e sufficiente che l'elemento lineare possa assumere la forma*

$$ds^2 = dx_n^2 + d\sigma^2$$

(dunque la varietà deve ammettere ∞^1 superficie geodeticamente parallele), *essendo*, in più, *nulli i coefficienti di rotazione* γ_{hkn} $(h, k \neq n)$.

Botanica. — *Corallinacee del litorale tripolitano* [1]. Nota III della dott^ssa. R. Raineri, presentata dal Socio O. Mattirolo.

Le forme di *Lithothamnium* e di *Lithophyllum* descritte nelle precedenti Note (pag. 282. e pag. 313), per la loro massa calcare, rappresentano elementi attivamente costruttori della panchina. Per completare l'esame delle alghe calcari raccolte dal prof. Parona, accennerò anche ad alcuni generi di Coralline che vivono, protette, nelle anfrattuosità rocciose della costa libica.

Corallina officinalis Linn.

(Bibl. De-Toni, *Sylloge algarum*, vol. IV, pag. 1840).

È un piccolo cespuglio biancastro, assai calcarizzato, di circa 1 cm. di alt. per 3 cm. di largh., con gli apici smussati. per l'eccessiva fragilità, per cui, mancando i concettacoli che si trovano all'estremità dei rami, dovetti classificarla servendomi degli altri caratteri. Il colore del tallo, decalcificato, è giallastro, tendente al verde; ben netta la divisione tricotoma dei rami, i cui articoli, innestati l'uno nell'altro, con una strozzatura non calcificata, sono appiattiti e diminuiscono di dimensione dalla base dei rami all'estremità. In ciascun articolo si alternano strie scure e strie chiare, disposte ad arco, che ricordano la struttura dei *Lithophyllum*, ma la lunghezza delle cellule non è la stessa in file vicine.

Un altro piccolo campione, meno calcarizzato del precedente, d'aspetto filamentoso esilissimo, ha i rami terminati con ingrossamenti, appiattiti a spatola, pur conservando, nelle altre parti della fronda, i caratteri della *C. officinalis* che fu anche detta *C. spathulifera* Kuetz.

Hab.: Marina di Sciara-Sciat.

Distr. geogr.: Mar Mediterraneo; Mar Nero; Lapponia; Siberia: Atlantico.

[1] Lavoro eseguito nel R. Orto Botanico di Torino.