ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1º SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

razione dei tessuti. Normalmente, agli effetti benefici della incessante circolazione del sangue si aggiungono i processi di ossidazione, i quali, mentre distruggono i cataboliti nocivi, dànno lungo a produzione di una notevole quantità di calore; e questa degradazione dell'energia sembra essere assolutamente indispensabile per il ristabilimento del potenziale fisiologico dell'organo.

Finora non è stata sicuramente dimostrata, nelle ghiandole, una produzione di acido carbonico parallela al maggior consumo di ossigeno, seguente all'attività secretiva, nè una simultanea produzione di calore. Ma tutto lascia sperare che, quando sarà possibile di applicare alle ghiandole i metodi che si sono dimostrati tanto efficaci nell'indagine dei muscoli, anche nelle ghiandole si potrà mettere sperimentalmente in evidenza la detta produzione di acido carbonico e di calore. Anche per tali ricerche la *ghiandola salivare posteriore* dell'*Octopus* si presta egregiamente, come risulta dai primi tentativi che all'uopo sto facendo.

Per ora, contentiamoci di constatare che *l'attività secretiva, in quanto concerne lo stabilirsi, nelle cellule ghiandolari, di quei processi che determinano la emissione di secreto normale in conseguenza di stimolazione nervosa, e probabilmente anche ormonica, dell'organo, è indipendente dalla presenza di ossigeno libero.*

Matematica. — *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie.* Nota III di E. Bompiani, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

1. Nelle Note precedenti [1] ho dato un sistema di forme che individuano una superficie rispetto al gruppo delle deformazioni di specie qualsiasi, e ho mostrato fra l'altro l'esistenza di invarianti e di covarianti (gaussiani) che pur contenendo derivate d'ordine $\nu + 1$ sono tali per deformazioni di specie ν: e ne ho dedotte alcune conseguenze quando un certo gruppo di essi si annulla (Nota II, nn. 3, 4, 5).

Voglio ora accennare al significato geometrico di alcuni invarianti, raggiungendo così l'analogo della curvatura media, e caratterizzare le superficie per le quali questo invariante è nullo (esse sono, rispetto alle deformazioni di specie superiore, le analoghe delle superficie d'area minima).

2. Consideriamo una curva di una superficie uscente da un suo punto $O(x_i)$; su di essa, a partire da O, portiamo un archetto σ; il quadrato della

[1] Questi Rendiconti, sedute del 2 e del 30 novembre 1919.

distanza dell'estremo (distinto da O) dallo $S(\nu)$ osculatore alla superficie in O è dato [fino ai termini d'ordine $2(\nu+1)$] da

$$\Delta^2_{\nu+1} = \frac{\sigma^{2(\nu+1)}}{[(\nu+1)!]^2} L^2_{\nu+1}$$

ove

$$L^2_{\nu+1} = \left[\sum_0^{\nu+1}{}_h \binom{\nu+1}{h} L_{\nu+1-h,h} \left(\frac{du}{ds}\right)^{\nu+1-h} \left(\frac{dv}{ds}\right)^h\right]^2 \text{ (}^1\text{)}.$$

Poichè $\Delta^2_{\nu+1}$ non dipende che dalla tangente alla curva in O (e non dai successivi elementi di essa), ha senso la ricerca del valor medio di $\Delta^2_{\nu+1}/\sigma^{2(\nu+1)}$ in O $\left(\text{al variare della tangente } \frac{du}{ds} \Big/ \frac{dv}{ds}\right)$.

Detto θ un angolo che individua la posizione della tangente nel fascio si trova

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{\Delta_{\nu+1}}{\sigma^{\nu+1}}\right]^2 = \frac{1}{2^{2(\nu+1)}} \frac{[2(\nu+1)]!}{[(\nu+1)!]^2} \frac{\omega^{2(\nu+1)}(L^2_{\nu+1}, L_1^{2(\nu+1)})}{H^{\nu+1}},$$

essendo

$$H = EG - F^2 .$$

Questa relazione fornisce il significato geometrico dell'invariante scritto a 2° membro.

Nello spazio ordinario (per $\nu = 1$) si trova che detto invariante (per movimenti) diminuito del quadrato della curvatura media dà, a meno di un fattore, la curvatura di Gauss.

Ora per deformazioni ed ambienti qualsiansi, sempre si ha:

La differenza dei due invarianti (per deformazioni di specie $\nu+1$)

$$\frac{\omega^{2(\nu+1)}(L^2_{\nu+1}, L_1^{2(\nu+1)}) - (-1)^{\nu+1}[\omega^{\nu+1}(L_{\nu+1}, L_1^{\nu+1})]^2}{H^{\nu+1}}$$

è invariante per deformazioni di specie ν.

3. La dimostrazione di questo teorema presenta alcune differenze nei due casi $\nu+1$ pari e $\nu+1$ dispari [a causa dell'invariante simbolico $\omega^{\nu+1}(L_{\nu+1}, L_1^{\nu+1})$]; presenterò quella per il caso $\nu+1 = 2\mu$, in vista della applicazione che segue.

Si ha (scrivendo per brevità x_1, x_2 come variabili nelle forme e rife-

(1) Le notazioni sono quelle delle Note precedenti; solo qui, per comodità, si è scritta la forma $L_{\nu+1}$ nelle variabili $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$ invece che in du_1, du_2.

rendosi a coordinate ortogonali sulla superficie)

$$L^2_{2\mu} = \sum_0 {}_t \sum_0^t {}_h \binom{2\mu}{t-h}\binom{2\mu}{h} L_{2\mu-h,h}\, L_{2\mu-t+h,t-h}\, x_1^{4\mu-t}\, x_2^t \text{ (}^1\text{)}$$

$$L_1^{4\mu} = (E x_1^2 + G x_2^2)^{2\mu} = \sum_0^{2\mu} {}_l \binom{2\mu}{l} E^l\, G^{2\mu-l}\, x_1^{2l}\, x_2^{4\mu-2l}$$

quindi

$$\omega^{4\mu}({}^2_{2\mu}\, , L_1^{4\mu}) = \sum_0 {}_l \frac{\binom{2\mu}{l}}{\binom{4\mu}{2l}} E^l\, G^{2\mu-l} \sum_0^{2l} {}_h \binom{2\mu}{2l-h}\binom{2\mu}{h} L_{2\mu-h,h}\, L_{2\mu-2l+h,2l-h}\, .$$

Analogamente

$$[\omega^{2\mu}(L_{2\mu}\, , L^2_{1\mu})]^2 = \sum_0 {}_l \sum_0^l {}_i \binom{\mu}{l-i}\binom{\mu}{i} E^l\, G^{2\mu-l}\, L_{2\mu-2i,2i}\, L_{2\mu-2l+2i,2l-2i}\, .$$

Facendo la differenza fra questi due invarianti (relativi) e separando in ogni termine della somma relativa ad l i termini con $L_{r,s}$ ad indici pari da quelli ad indici dispari si ha

$$\omega^{4\mu}(L^2_{2\mu}\, , L_1^{4\mu}) - [\omega^{2\mu}(L_{2\mu}\, , L_1^{2\mu})]^2 =$$

$$= \sum_0 {}_l E^l\, G^{2\mu-l} \left\{ \sum_0^l {}_i \left[\frac{\binom{2\mu}{l}}{\binom{4\mu}{2l}} \binom{2\mu}{2l-2i}\binom{2\mu}{2i} - \binom{\mu}{i}\binom{\mu}{l-i} \right] \times \right.$$

$$\times L_{2\mu-2i,2i}\, L_{2\mu-2l+2i,2l-2i} -$$

$$\left. - \sum_0^{l-1} {}_i \frac{\binom{2\mu}{l}}{\binom{4\mu}{2l}} \binom{2\mu}{2l-2i-1}\binom{2\mu}{2i+1} L_{2\mu-2i-1,2i+1}\, L_{2\mu-2l+2i+1,2l-2i-1} \right\}.$$

Per vedere che questo è realmente un invariante per deformazioni di specie ν, basta, dato il suo carattere invariante provare che i suoi elementi si possono raggruppare in modo da farvi figurare le sole differenze

$$L_{h,k}\, L_{m,n} - L_{h-1,k+1}\, L_{m+1,n-1} \qquad \text{(Nota I, nn. 2 e 6).}$$

(¹) Lascio indeterminato l'estremo superiore della sommatoria relativa a t per comprendere con questa scrittura, oltre i termini scritti che hanno senso per $t \leq 2\mu$, anche quelli che si ottengono scambiando le variabili $x_1\, x_2$ e l'ordine degli indici in ogni $L_{r,s}$; per $2\mu < t \leq 4\mu$ si avrebbero $L_{r,s}$ con indici negativi quindi, formalmente, privi di senso, che vanno interpretati nel modo ora detto.

Se è possibile porre il coefficiente di $E^l G^{2\mu-l}$ nella forma

$$\sum_0^{2l}{}_\rho C_{l,\rho}(L_{2\mu-\rho,\rho} L_{2\mu-2l+\rho,2l-\rho} - L_{2\mu-\rho-1,\rho+1} L_{2\mu-2l+\rho+1,2l-\rho-1})$$

(ove le $C_{l,\rho}$ sono coefficienti numerici da determinare) risulta dal confronto dei coefficienti

$$C_{l,2i} - C_{l,2i-1} = \frac{\binom{2\mu}{l}}{\binom{4\mu}{2l}}\binom{2\mu}{2l-2i}\binom{2\mu}{2i} - \binom{\mu}{i}\binom{\mu}{l-i}$$

$$C_{l,2i+1} - C_{l,2i} = \frac{\binom{2\mu}{l}}{\binom{4\mu}{2l}}\binom{2\mu}{2l-2i-1}\binom{2\mu}{2i+1};$$

ne segue che dev'essere soddisfatta la condizione

$$\sum_0^l{}_i (C_{l,2i} - C_{l,2i-1}) + \sum_0^l{}_i (C_{l,2i+1} - C_{l,2i}) \equiv 0 \ (^1),$$

il che effettivamente accade, perchè

$$\frac{\binom{2\mu}{l}}{\binom{4\mu}{2l}} \sum_0^{2l}{}_h \binom{2\mu}{2l-h}\binom{2\mu}{h} - \sum_0^l{}_i \binom{\mu}{i}\binom{\mu}{l-i} = \frac{\binom{2\mu}{l}}{\binom{4\mu}{2l}}\binom{4\mu}{2l} - \binom{2\mu}{l} \equiv 0 .$$

È così provato il teorema; e dalle precedenti si ha

$$C_{l,\rho} = \frac{\binom{2\mu}{l}}{\binom{4\mu}{2l}} \sum_0^{\rho}{}_j \binom{2\mu}{2l-j}\binom{2\mu}{j} - \sum_0^{[\rho/2]}{}_g \binom{\mu}{g}\binom{\mu}{l-g} .$$

Siccome poi manca il termine relativo ad $l=0$, possiamo scrivere finalmente

(2)
$$\omega^{4\mu}(L^2_{2\mu} \cdot L_1^{4\mu}) - [\omega^{2\mu}(L_{2\mu} \cdot L_1^{2\mu})]^2 =$$
$$= H \sum_0 {}_l E^l G^{2\mu-l-2} \sum_0^{2l+2}{}_\rho C_{l+1,\rho} (L_{2\mu-\rho,\rho} L_{2\mu-2l+\rho-2,2l-\rho+2} -$$
$$- L_{2\mu-\rho-1,\rho+1} L_{2\mu-2l+\rho-1,2l-\rho+1}) .$$

(1) Perchè gli indici $2i-1$ e $2i+1$ percorrono gli stessi valori essendo privi di senso, quindi da porre $=0$, i coefficienti $C_{l,-1}$ e $C_{l,2l+1}$.

Ancora più suggestiva è l'espressione del 2° membro per mezzo delle spinte; indicando con $K_1, K_2, \ldots K_\mu$ dei coefficienti numerici che è inutile trascrivere, esso vale

$$K_1 H \omega^{4\mu-4} [\omega^2 (L_{2\mu}, L_{2\mu}) L_1^{4\mu-4}] + K_2 H^2 \omega^{4\mu-8} [\omega^4 (L_{2\mu}, L_{2\mu}) L_1^{4\mu-8}] + \cdots$$
$$+ K_{\mu-1} H^{\mu-1} \omega^4 [\omega^{2\mu-2} (L_{2\mu}, L_{2\mu}) L_1^4] + K_\mu H^\mu \omega^{2\mu} (L_{2\mu}, L_{2\mu})\,;$$

si ha un invariante assoluto (che per $\mu = 1$ si riduce alla curvatura gaussiana) dividendo questo per $H^{2\mu}$.

4. La relazione (2) porta spontaneamente a definire come *curvatura media per le deformazioni di specie* $\nu + 1$ la radice quadrata di

$$\frac{[\omega^{\nu+1} (L_{\nu+1}, L_1^{\nu+1})]^2}{H^{\nu+1}}.$$

Riteniamo $\nu + 1 = 2\mu$ e studiamo le superficie a curvatura media, per deformazioni di specie 2μ, nulla. Riferita la superficie alle sue linee isotrope, per l'annullarsi di $[\omega^{2\mu}(L_{2\mu}, L_1^{2\mu})]^2$, essendo $L_1^{2\mu} = 2^\mu F^\mu x_1{}^\mu x_2{}^\mu$, deve aversi $L^2{}_{\mu,\mu} = 0$; quindi, nel campo reale, $L_{\mu,\mu} = 0$, cioè

$$\frac{\partial^{2\mu} x_i}{\partial u^\mu \, \partial v^\mu} + \cdots = 0 \tag{3}$$

ove i punti indicano termini lineari nelle derivate d'ordine $< 2\mu$. Viceversa, se vale la (3) è nullo l'invariante scritto. Dall'interpretazione geometrica della (3) segue:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la curvatura media per deformazioni di specie 2μ di una superficie reale sia nulla è che le curve isotrope di essa formino un doppio sistema a carattere involutorio dotato della seguente proprietà: gli S_μ osculatori alle curve di un sistema in $\mu + 1$ punti successivi di una curva dell'altro sistema stanno in uno $S(2\mu - 1)$ osculatore alla superficie.

E poichè da $L_{\mu,\mu} = 0$ segue per derivazione $L_{\mu+h,\mu+h} = 0$, si ha pure:

Se per una superficie è nulla la curvatura media per deformazioni di specie 2μ, sono nulle tutte le curvature medie per deformazioni superiori di specie $2(\mu + h)$.

In particolare: le superficie d'area minima hanno nulle tutte le curvature medie (cioè per deformazioni di specie pari qualsiasi).

Se ϱ è la dimensione dello $S(2\mu - 1)$ osculatore generico alla superficie considerata e questa giace in $S_{\varrho+1}$, alla condizione precedente si può dare aspetto reale considerando le curve *quasi-asintotiche* della superficie per le quali lo $S_{2\mu}$ osculatore in un punto sta nello $S(2\mu - 1)$ osculatore ivi alla superficie. Esse sono definite da $L_{2\mu} = 0$ (che, data la dimensione ambiente, è un'equazione effettiva di grado 2μ); quindi

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie di $S_{\rho+1}$ [*ove* ϱ *è la dimensione dello* $S(2\mu-1)$ *osculatore generico ad essa*] *abbia nulla la curvatura media per deformazioni di specie* 2μ, *è che il gruppo delle tangenti quasi-asintotiche in un suo punto generico sia apolare al gruppo delle tangenti isotrope ivi* (*contato* μ *volte*).

Per $\mu=1$ si hanno le proprietà delle superficie d'area minima.

5. Ad una classe di superficie ancora più somigliante a quelle d'area minima si arriva cercando il significato dell'annullarsi identico del covariante

$$[\omega^2(L_{2\mu}, L_1^2)]^2$$

(quadrato dell'Hessiano della forma simbolica $L_{2\mu}$ e di L_1^2). Riferita la superficie alle linee isotrope, si ricava, nel campo reale,

$$L_{2\mu-1,1}=L_{2\mu-2,2}=\cdots=L_{1,2\mu-1}=0$$

(indicando così l'annullarsi dei determinanti d'ordine massimo estratti dalle matrici precedenti); si annullano in conseguenza tutte le spinte $\omega^{2k}(L_{2\mu}, L_1^{2k})$, in particolare, per $k=\mu$, l'invariante prima considerato.

Il significato delle ultime equazioni è il seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè per una superficie sia identicamente $[\omega^2(L_{2\mu}, L_1^2)]^2=0$, *è che il doppio sistema di linee isotrope sia caratterizzato dalle seguenti proprietà: gli* S_h $(1\leq h\leq 2\mu-1)$ *osculatori alle curve di un sistema in* $2\mu-h+1$ *punti successivi di una curva dell'altro sistema stanno in uno* $S(2\mu-1)$ *osculatore alla superficie.*

Se poi l'ambiente è un $S_{\rho+1}$ (ϱ ha il significato di prima) l'equazione delle quasi-asintotiche si riduce a

$$(4)\qquad (du/dv)^{2\mu}=-L_{0,2\mu}/L_{2\mu,0}\,;$$

e poichè la (3) nell'ipotesi attuale dà

$$\omega^{4\mu}(L_{2\mu}^2, L_{1\mu}^4)=\left\{\frac{\binom{2\mu}{\mu}}{\binom{4\mu}{2\mu}}-1\right\}L_{2\mu,0}\,L_{0,2\mu}>0\,,$$

sarà

$$L_{2\mu,0}\,L_{0,2\mu}<0$$

e perciò la (4) ammette due radici *reali* di segno opposto.

Le superficie reali di $S_{\rho+1}$ *per le quali è* $\omega^2(L_{2\mu}, L_1^2)=0$ *posseggono un doppio sistema* r e a l e *di quasi-asintotiche ortogonali.*