ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 giugno 1920.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *Sulla funzione iterata di una razionale intera.* Nota I del Socio S. Pincherle.

1. Sia data la funzione razionale intera di grado m

$$\alpha(x) \equiv x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m . \tag{1}$$

L'operazione, che consiste nel sostituire $\alpha(x)$ alla variabile complessa x, si indicherà con S.

Essendo x un punto arbitrario del piano complesso, il punto $S^n x = x_n$ ne sarà il conseguente n^{simo}; i punti x' definiti da $S^n x' = x$ ne saranno gli antecedenti n^{simi}: il loro sistema verrà indicato con (x'_n), ed x'_n sarà uno generico fra essi. Il punto x_n equivale ad $\alpha_n(x)$, essendo

$$\alpha_2(x) = \alpha(\alpha(x)), \ldots \alpha_n(x) = \alpha_{n-1}(\alpha(x)) .$$

2. Con Ω si indicherà la porzione del piano tale che per i punti x di essa si verifichi che

$$\lim_{n=\infty} S^n x = \infty . \tag{2}$$

Il punto all'infinito del piano (piano-sfera) x appartiene dunque ad Ω; se un punto x appartiene ad Ω, vi appartengono tutti gli x_n e tutti gli (x'_n) per ogni n.

3. Data un'area $\mathfrak{A}$ finita, tutta interna ad Ω, ed un numero positivo R arbitrario, è sempre possibile di determinare un intero $\bar{n}$ tale che, per ogni x di $\mathfrak{A}$ ed ogni $n > \bar{n}$, sia

$$|S^n x| > R. \tag{3}$$

Sia infatti $\bar{x}$ un punto di $\mathfrak{A}$; poichè esso appartiene ad Ω, esiste un $\bar{n}_x$ tale che, per $n > \bar{n}_x$, si ha (ε prescelto positivo arbitrario)

$$|\bar{x}_n| > R + \varepsilon.$$

Descritto dunque un cerchio di centro $\bar{x}_n$ e di raggio inferiore ad ε, la $x = \alpha_n(x')$ farà corrispondere ai punti x di questo cerchio un'area, generalmente di più pezzi, ma di cui una porzione connessa σ, contenente $\bar{x}$ nel suo interno, sarà tutta in $\mathfrak{A}$: questa σ è dunque proiettata da α_n nel detto cerchio, e quindi per i punti di σ la (3) è soddisfatta. Ma poichè una tale area σ esiste per ogni punto di $\mathfrak{A}$, per un teorema [1] che coincide in sostanza colla nota proposizione di Heine-Borel, esiste un $\bar{n}$ che vale per tutto $\mathfrak{A}$ a soddisfare alla (3).

4. Essendo q un numero prefissato positivo e maggiore dell'unità, è facile vedere come si possa determinare un numero positivo $R > 1$, tale che, per ogni $|x| \geq R$, si abbia

$$|\alpha(x)| > q|x|^{m-1} \text{ [2]}; \tag{4}$$

ne segue, per quei valori di x,

$$|x_n| > q^{1+(m-1)+\cdots(m-1)^{n-1}}|x|^{(m-1)^n}; \tag{4'}$$

i conseguenti x_n di x tendono dunque all'infinito come i termini di una progressione ultrageometrica a^{b^n}, a e b positivi e maggiori dell'unità.

5. È facile di rilevare le seguenti proprietà del campo Ω:

a) Esso non comprende tutti i punti del piano. Basta pensare alle radici delle equazioni $\alpha_n(x) = x$.

b) Esso è connesso. Siano infatti x ed y due qualunque suoi punti: si può prendere n abbastanza grande perchè x_n, y_n siano fuori del cerchio di raggio R di cui al n. 4; si possono allora unire x_n, y_n mediante una linea continua l tutta esterna ad R e perciò tutta appartenente ad Ω. Applicando ora la S^{-n}, ad l corrisponderà una linea composta in generale di più pezzi, ma di cui un pezzo unirà i punti $x\,y$ e sarà, come la l, tutto in Ω: il campo Ω è dunque connesso.

[1] Da me dato fino dal 1882. Ved. « Mem. della R. Accad. delle scienze dell'Istituto di Bologna », serie IV, tomo III, pag. 153.

[2] Ved. « Rendiconti della R. Accad. delle scienze di Bologna », adunanza 25 gennaio 1920.

c) Esso è aperto: cioè ogni suo punto gli è interno. Se infatti un punto $\overline{x}$ del contorno di Ω potesse appartenere ad Ω, si avrebbe, per n abbastanza grande, $|\overline{x}_n| > \mathrm{R} + \varepsilon$, e quindi un cerchio di centro $\overline{x}_n$ e di raggio minore di ε apparterrebbe tutto ad Ω. Vi apparterrebbe dunque l'area ottenuta trasformando questo cerchio mediante la S^{-n}, e quindi un pezzo σ dell'area contenente $\overline{x}$ nel suo interno: contro l'ipotesi che $\overline{x}$ è al contorno di Ω.

d) Indicando con Γ il contorno di Ω, si ha dunque che nessun punto di Γ appartiene ad Ω; che Γ è trasformato in sè da S; che Γ è tutto interno al cerchio R; che Γ è chiuso.

e) Se Γ constasse di un sol punto z, sarebbe $\alpha(z) = z$ e z sarebbe la sola radice dell'equazione $\alpha(x) = z$, e pertanto annullerebbe la $\dfrac{d\alpha(x)}{dx}$; ma è noto che in tale caso tutto un intorno di z verrebbe proiettato, da S, internamente all'intorno medesimo, e con ciò z non è sul contorno Γ di Ω. Se Γ constasse di un numero finito di punti $z_1, z_2, \dots z_p$, e se fosse $\alpha(z_i) = z_i$, i essendo un intero fra 1 e p, sarebbe anche $\alpha_r(z_i) = z_i$; ma si può prendere r abbastanza grande perchè sia $m^r > p$, onde l'equazione $\alpha_r(x) = z_i$, che non può avere radici diverse da $z_1, z_2, \dots z_p$, dovrebbe avere qualche radice multipla, e si conclude come precedentemente. Se invece $\alpha(z_i)$ non è uguale a z_i stesso, le $z_1, z_2, \dots z_p$ saranno distribuite, da S, in un certo numero di sistemi circolari; essendo allora q il minimo comune multiplo degli ordini di questi sistemi, sarà $\alpha_q(z_i) = z_i$ per $i = 1, 2, \dots p$, e si torna alla conclusione precedente. Segue da ciò che Γ non può constare di un numero finito di punti.

f) I punti limiti degli antecedenti dei punti di Ω appartengono a Γ. Se è possibile, un tale punto λ, limite degli antecedenti $\overline{x}'_n$ di $\overline{x}$, appartenga ad Ω. Determinato il cerchio R come al n. 4, per ogni x esterno ad R è $|x'_n| < |x|$: ora, poichè λ è punto limite degli antecedenti di qualunque conseguente di $\overline{x}$, si può senza restrizione supporre che $\overline{x}$ sia esterno al cerchio R. Ma appartenendo λ ad Ω, si avrà un indice p tale che $\alpha_p(\lambda)$ sia superiore, in modulo, ad $|\overline{x}| + \varepsilon$: ma $\alpha_p(\lambda)$ sarà pure punto limite di antecedenti di $\overline{x}$, onde si avranno antecedenti di $\overline{x}$ di modulo superiore ad $|\overline{x}|$, il che è impossibile; λ non può dunque appartenere ad Ω.

6. Si possono descrivere cerchi aventi il centro nell'origine e tali che le loro circonferenze ed i punti esterni appartengano ad Ω. I loro raggi avranno un limite inferiore, non nullo (n. 5, *e*): sia ϱ questo limite inferiore, C_0 la circonferenza col centro nell'origine e raggio ϱ.

Si vede subito

a) che ogni punto esterno a C_0 appartiene ad Ω;

b) che qualche punto della circonferenza C_0 non appartiene ad Ω; infatti, se così non fosse, si potrebbe ad ogni punto x di C_0 fare corrispondere un cerchio di centro x e di raggio ε_x tutto appartenente ad Ω (n. 5, *c*), ed allora, per il teorema di Heine-Borel ([1]), i punti x apparterrebbero ad un numero finito di tali cerchi, cioè un ε potrebbe servire per tutti gli x. Ma allora l'esterno di ogni cerchio di centro o e raggio $\varrho - \varepsilon'$, con $\varepsilon' < \varepsilon$, apparterrebbe tutto ad Ω, contro la definizione di ϱ.

c) Segue, da ciò, che C_0 è tangente a Γ, nel senso che C_0 e Γ hanno almeno un punto in comune, ma che nessun punto di Γ è esterno a C_0.

d) Se tutti i punti di C_0 appartengono a Γ, nessun punto interno a C_0 può appartenere ad Ω (n. 5, *b*); C_0 costituisce dunque l'intero contorno di Ω: ma esso è trasformato in sè da S, e coincide quindi colla cassinoide ad m fuochi $|\alpha(x)| = \varrho$, la quale può ridursi al cerchio solo se tutti i suoi fuochi coincidono con $x = 0$. Deve dunque essere $\alpha(x) \equiv x^m$, onde $\varrho = 1$. Fuori di questo caso, Γ, e quindi Ω, hanno punti interni a C_0.

I punti di contatto di C_0 con Γ si indicheranno con s.

7. L'antecedente n^{sima} della C_0 è la cassinoide definita dall'equazione

$$|\alpha_n(x)| = \varrho \tag{5}$$

essa si indicherà con C_n. Sulla C_n esistono gli m^n antecedenti (x'_n) di ogni punto di contatto s di C_n con Γ; essi sono punti di contatto di C_n con Γ. La C_n ha m^n fuochi: essi sono gli antecedenti n^{simi} di $x = 0$, ed $n - 1^{simi}$ delle radici dell'equazione $\alpha(x) = 0$.

Per la definizione stessa di ϱ, risulta che C_n non può avere punti esterni a C_{n-1}. Le curve

$$C_0 , C_1 , C_2 , \ldots$$

sono dunque ciascuna interna alla precedente, all'infuori dei punti comuni.

Sia $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots x^{(n)}, \ldots$ un sistema di punti comunque presi, colla condizione che $x^{(n)}$ sia su C_n; sia ξ un punto limite del sistema. Sia ξ in Ω; allora apparterrebbe ad Ω tutto un cerchio (ε) di centro ξ e raggio ε, e si potrebbe assegnare un $\bar{n}$ tale che, per $n > \bar{n}$, il campo ottenuto applicando la S^n ad (ε) sia tutto esterno al cerchio R (n. 3): ma si hanno in (ε) punti $x^{(n)}$ tali che $|S^n x^{(n)}| = \varrho$, dove n può essere maggiore di $\bar{n}$; si viene dunque ad una contradizione. I punti limiti del sistema considerato appartengono dunque a Γ, che è quindi il luogo limite delle curve C_n.

9. Siano genericamente w le radici della derivata $\alpha'(x)$ di $\alpha(x)$. Dirò che $\alpha(x)$ è nel caso A se nessuna w appartiene ad Ω, ed è nel caso B quando qualche w vi appartiene.

a) Nel caso A, non appartiene ad Ω nessuna radice di $\alpha'_n(x)$: infatti, si ha

$$\alpha'_n(x) = \frac{d\alpha_n(x)}{dx} = \alpha'(x_{n-1})\, \alpha'(x_{n-2}) \ldots \alpha'(x) ;$$

[1] Ved. la citazione al n. 3.

le radici di $\alpha'_n(x)$ sono dunque le w ed i loro antecedenti fino all'indice $n-1$.

b) In questo medesimo caso A, ogni C_n è costituita da una sola ovale. Consideriamo infatti la corrispondenza posta fra x ed y da $y=\alpha_n(x)$: a C_n corrispondono m^n cerchi di raggio ϱ sovrapposti negli m^n fogli della riemanniana luogo di y: ora questi cerchi contengono nel loro interno tutti i punti di diramazione della riemanniana stessa, poichè questi non sono altro se non conseguenti dei punti w. Ma da codesti punti partono le linee di saldatura dei fogli della riemanniana, formate per esempio da semirette: esse attraversano dunque i cerchi sovrapposti che vengono così a costituire un'unica linea chiusa sulla riemanniana. La corrispondente cassinoide C_n del piano x sarà quindi composta di un'unica ovale.

10. Le radici di $\alpha(x)$, quelle di $\alpha_n(x)$ ed il punto $x=0$, appartengono tutti ad Ω, o non ve ne appartiene nessuno: infatti le dette radici non sono altro se non gli antecedenti dello zero.

Ora, nel caso A, lo zero non appartiene ad Ω. Infatti, se le radici di una $\alpha_\mu(x)$ cadono tutte entro C_n, ma non tutte entro C_{n+1}, in modo che fra le due curve se ne trovino r, per un noto teorema di Dell'Agnola [1] si troveranno fra le due curve anche r radici della derivata $\alpha'_\mu(x)$. Ma nel caso A queste sono in Ω, quindi interne a tutte le C_n: lo stesso deve dunque essere delle radici di $\alpha_\mu(x)$, qualunque sia μ: queste, e quindi anche $x=0$, non appartengono ad Ω.

Reciprocamente, se $x=0$ non appartiene ad Ω, non vi appartengono le radici di α_μ e quindi, per lo stesso teorema citato, qualche radice di α'_μ, e perciò nessuna delle w e delle loro antecedenti; si è così nel caso A.

Di queste premesse verrà fatta applicazione nella Nota II.

(1) « Rendic. della R. Accademia dei Lincei », serie 5ª, vol. XIII, fasc. 8.