

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI  
ANNO CCCXVII.

1920

---

SERIE QUINTA

---

RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI  
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

---

1920

Matematica. — *Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali.* Nota I del Corrispondente GINO FANO.

I primi esempi di superficie algebriche che ammettono gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali (non contenuti in gruppi più ampi e continui) sono stati dati da Humbert e Painlevé<sup>(1)</sup>. Più tardi, Enriques<sup>(2)</sup> ha stabilito che queste superficie appartengono tutte a una delle due categorie seguenti: 1) superficie contenenti un fascio di curve ellittiche<sup>(3)</sup>; 2) superficie (regolari) aventi i generi tutti eguali all'unità; e Severi<sup>(4)</sup> ha dimostrato che, in connessione colla *base* del sistema delle curve esistenti sulla superficie, si può costruire una forma quadratica a coefficienti interi, tale che il gruppo delle trasformazioni birazionali della superficie si rispecchi in un gruppo isomorfo (oloedricamente o meriedricamente) di sostituzioni lineari di questa forma quadratica. Singoli casi di superficie così fatte, e, fra altre, di superficie del 4° ordine, sono stati studiati da Severi stesso, Godeaux, Snyder, Sharpe, Rosenblatt e da me. Nella presente Nota, e in altre che seguiranno, vengono trattati alcuni casi nuovi di superficie del 4° ordine ( $F^4$ ) con gruppi birazionali infiniti<sup>(5)</sup>, cominciando colla  $F^4$  contenente due rette

(<sup>1</sup>) La citazione che si trova generalmente per Humbert (Compt. Rend., 30 gennaio 1897), e quella, anche frequente, di Painlevé (Compt. Rend., 14 febbraio 1897), non sono esatte; fra altro, nei due giorni sopra indicati non ebbe luogo seduta dell'Accademia di Parigi. L'esempio dato da Humbert, che è caso particolare della superficie di Kummer, si trova, quasi incidentalmente, nelle Note *Sur la décomposition des fonctions  $\theta$  en facteurs*, Compt. Rend. de l'Acad. d. Sc., vol. 126 (1° sem. 1898), pag. 394, e *Sur les fonctions abéliennes singulières* (ibid., pag. 508); si cfr. anche la Memoria avente questo stesso ultimo titolo, nel Journ. de mathém., ser. 5<sup>a</sup>, vol. 6 (1900), pag. 279, in part. parte IV, pag. 372. L'esempio dato da Painlevé, fondato sopra proprietà della funzione ellittica  $P(u)$ , si trova nella Nota *Sur les surfaces qui admettent un groupe infini discontinu*, Compt. Rend., vol. 126 (1° sem. 1898), pag. 512.

(<sup>2</sup>) *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali*, Rend. R. Accad. dei Lincei, ser. 5<sup>a</sup>, vol. 15 (1906<sub>2</sub>), pag. 665.

(<sup>3</sup>) Categoria più ampiamente discussa nelle due Note *Sulla classificazione delle superficie algebriche e più particolarmente sulle superficie di genere lineare  $p^{(1)} = 1$* , Rend. e ser. cit., vol. 23 (1914<sub>1</sub>), pp. 206, 291.

(<sup>4</sup>) *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica*, Rendic. Circ. mat. di Palermo, vol. 30 (1910<sub>2</sub>), pag. 265.

(<sup>5</sup>) E si troveranno forse elementi per avviare lo studio di tipi generali di superficie che ammettono gruppi così fatti; forse anche per la determinazione di questi tipi, in corrispondenza ai valori più piccoli del numero  $q$  delle curve costituenti una base.

sghembe, primo esempio di studio completo di un gruppo per il quale la forma quadratica fondamentale di Severi è ternaria.

1. Consideriamo la superficie più generale del 4° ordine,  $F^4$ , dello spazio  $S_3$ , contenente due rette sghembe  $r_1, r_2$  <sup>(1)</sup> (superficie che dipende da 17 moduli). Tale superficie non ammette trasformazioni proiettive (all'infuori dell'identità). Invero, una trasformazione così fatta dovrebbe avere  $r_1$  e  $r_2$  come rette unite, oppure dovrebbe scambiarle fra loro; e non potrebbe in nessun caso essere involutoria (nè potrebbe essere involutoria una sua potenza), perchè  $F^4$  dipenderebbe da 11 moduli al più <sup>(2)</sup>, anzichè da 17. Ora, se  $r_1$  e  $r_2$  sono rette unite, l'omografia dovrebbe trasformare in sè l'involuzione  $g_3^1$  (affatto generica) che sopra ciascuna di esse segnano le cubiche intersezioni\* di  $F^4$  coi piani per la retta stessa; potrebbe quindi soltanto scambiare a 2 a 2 i quattro punti doppi di ciascuna  $g_3^1$ ; e perciò il suo quadrato, avendo come punti uniti tutti i punti  $r_1$  e  $r_2$ , sarebbe l'identità, oppure un'omografia involutoria (potendo soltanto scambiare i due punti intersezioni ulteriori di  $F^4$  con ogni retta appoggiata a  $r_1$  e  $r_2$ ). Se invece  $r_1$  e  $r_2$  vengono scambiate fra loro, le stesse considerazioni valgono per il quadrato di tale (supposta) omografia.

Qualunque trasformazione birazionale non identica sopra  $F^4$  dovrà dunque operare in modo non identico sopra i sistemi lineari di curve della superficie; e, inoltre, non potrà mutare in sè stesso nè il sistema lineare delle sezioni piane di  $F^4$ , nè un qualsiasi suo multiplo (la divisione dei sistemi lineari essendo, sopra  $F^4$ , operazione univoca).

Poichè la più generale superficie del 4° ordine non contiene altre curve all'infuori delle sezioni piane e loro multipli, la  $F^4$  condotta genericamente per due rette sghembe non conterrà che curve composte mediante tali rette  $r_1, r_2$  e le sezioni piane  $C$ . Queste tre linee formeranno pertanto sopra  $F^4$  una base <sup>(3)</sup>; noi sostituiremo però alle rette  $r_1, r_2$  le cubiche loro residue rispetto alle sezioni piane ( $\gamma_1 = C - r_1, \gamma_2 = C - r_2$ ), considerando perciò come base la terna di curve  $\gamma_1, \gamma_2, C$ .

(1) Le  $F^4$  contenenti due rette sghembe rientrano in uno dei casi considerati da Sharpe e Snyder nella Memoria *Birational transformations on certain quartic surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 15 (1914), pag. 266; cfr. in part. § 3, dove si suppone che la  $F^4$  contenga una retta, e un'altra curva razionale, di ordine  $n$ , incontrante la retta in  $n - 1$  punti. Lo studio è però quivi appena avviato; inoltre nel caso presente,  $n = 1$ , vi è sulla superficie un secondo fascio di curve ellittiche, e il gruppo è perciò più ampio che non per  $n > 1$ .

(2) Severi, Mem. cit. *Complementi ecc.*; ved. in particolare n. 12, b).

(3) Severi, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*, Math. Ann., Bd. 42 (1906), pag. 194, nonchè la Nota precedente nei *Compt. Rend. de l'Acad. d. Sc.*, vol. 140 (1° sem. 1905), pag. 361. Inoltre: *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*, Annales Ec. norm. sup., 3<sup>em</sup> sér., tom. 25 (1908), pag. 449.

Poichè i gradi virtuali di  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $C$  valgono rispett. 0, 0, 4, mentre  $C$  taglia  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  in 3 punti, e queste ultime si tagliano in 2 punti, il determinante di tale base sarà

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 20.$$

Dico, ora, che la base considerata è *intermediaria* <sup>(1)</sup>, ossia che il suo determinante ha il valor assoluto minimo possibile. Infatti, se con altra base si potesse avere un determinante di valor assoluto  $< 20$ , questo valore dovrebbe essere un divisore di 20; e anzi, più particolarmente, sarebbe il quoziente della divisione di 20 per un numero quadrato perfetto <sup>(2)</sup>; dunque soltanto  $20:4=5$ . Ora il determinante in parola è, in ogni caso, simmetrico, e come elementi principali ha numeri tutti pari (perchè del tipo  $2p-2$ , essendo  $p$  il genere delle singole curve costituenti la base); perciò, dei 6 termini, certo 4 sono pari, e gli altri 2 (per la simmetria) sono eguali fra loro in valore e segno. Il determinante sarà dunque anch'esso numero pari, e non potrà perciò essere  $= 5$ .

Essendo  $F^4$  superficie con curva canonica di ordine zero, la base intermediaria  $\gamma_1, \gamma_2, C$  sarà pure *minima* <sup>(3)</sup>; vale a dire, ogni curva esistente sopra  $F^4$  potrà esprimersi mediante una combinazione lineare

$$x\gamma_1 + y\gamma_2 + zC$$

per valori interi (positivi, negativi, o nulli) di  $x, y, z$ .

A questa base è legata, nel senso stabilito da Severi <sup>(4)</sup>, la forma quadratica fondamentale

$$f \equiv 4z^2 + 4xy + 6xz + 6yz,$$

alla quale spettano le proprietà seguenti:

1) Detta forma è equivalente, propriamente o impropriamente, a tutte quelle formate in modo analogo colle altre basi intermediarie, e perciò minime, della superficie  $F^4$ .

2) La determinazione delle curve di grado (virtuale)  $n$ , esistenti sopra  $F^4$ , dipende dalla risoluzione in numeri interi dell'equazione

$$f \equiv 4z^2 + 4xy + 6xz + 6yz = n;$$

<sup>(1)</sup> Severi, Mem. cit. *La base minima ecc.*, § 1.

<sup>(2)</sup> Severi, *La base minima ecc.*, § 1, pag. 453, formola (4).

<sup>(3)</sup> Severi, Mem. cit. *Complementi ecc.*, n. 7.

<sup>(4)</sup> Memoria cit., *Complementi ecc.*, § 2. La forma quadratica fondamentale è, in generale,  $\sum_{ik} n_{ik} \lambda_i \lambda_k$ , dove le  $\lambda_i$  sono le variabili, e i coefficienti  $n_{ik}$  sono (ordinatamente) gli elementi del determinante della base (D).

e ad ogni soluzione così fatta corrisponde (con opportuna scelta del segno di una, e conseguentemente delle altre variabili) uno ed un solo sistema effettivo  $|x\gamma_1 + y\gamma_2 + zC|$ .

3) Il gruppo delle eventuali trasformazioni birazionali di  $F^4$  si rispecchia in un gruppo isomorfo [e, in questo caso, oloedricamente isomorfo (1)] di sostituzioni lineari a coefficienti interi, di modulo  $\pm 1$ , della forma  $f$ . Se la trasformazione birazionale considerata sopra  $F^4$  muta la base  $\gamma_1, \gamma_2, C$  nella nuova base (anche minima)

$$(1) \quad \begin{aligned} \gamma'_1 &= a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + a_{13}C \\ \gamma'_2 &= a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + a_{23}C \\ C' &= a_{31}\gamma_1 + a_{32}\gamma_2 + a_{33}C \end{aligned} \quad (|a_{ik}| = \pm 1),$$

la forma  $f$  sarà mutata in sè dalla sostituzione lineare

$$(2) \quad \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z \\ y' &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z \\ z' &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z \end{aligned}$$

il cui determinante differisce dal precedente solo per lo scambio delle orizzontali colle verticali. Questa proprietà non è però invertibile; e vedremo che esistono anche sostituzioni lineari di modulo  $\pm 1$  della forma  $f$  (ad es. quella risultante dalla simmetria rispetto ad  $x$  ed  $y$ :  $x' = y, y' = x, z' = z$ ), alle quali non corrispondono trasformazioni birazionali di  $F^4$ .

2. È facile assegnare *tre* distinte trasformazioni birazionali della superficie  $F^4$ , colle relative sostituzioni (1) e (2); e, fra queste, due non periodiche, con che il gruppo complessivo di  $F^4$  sarà certo infinito (discontinuo). In seguito verrà dimostrato che questo gruppo complessivo è appunto quello generato dalle tre trasformazioni anzidette.

a) Le rette appoggiate a  $r_1$  e  $r_2$  (formanti perciò una congruenza lineare) incontrano ulteriormente  $F^4$  nelle coppie di punti di un'involutione razionale I (2), che lascia invariati i due fasci di cubiche  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , subordinando sopra ogni  $\gamma_1$  o  $\gamma_2$  la proiezione doppia dal suo punto di appoggio a  $r_2$  o risp.  $r_1$ . Il sistema delle sezioni piane  $C$  verrà mutato in un sistema (per ovvie ragioni di simmetria) del tipo  $x(\gamma_1 + \gamma_2) + zC$ : scrivendo che questo sistema è, al pari di  $|C|$ , di grado 4 [onde  $f(x, x, z) = 4$ ] e che

(1) Invero, la sostituzione (1) potrebbe essere identica soltanto per una trasformazione proiettiva sopra  $F^4$ ; caso che qui è escluso.

(2) Questa involuzione conduce a rappresentare  $F^4$  sopra una quadrica doppia (quale è appunto, nello spazio  $S_3$  rigato, la stessa congruenza di rette di direttrici  $r_1, r_2$ ) con curva di diramazione di 8° ordine, quadrisecante le generatrici di ambo i sistemi.

le sue curve incontrano le  $\gamma_1$  (o le  $\gamma_2$ ), anche al pari delle C, in 3 punti, si hanno le due relazioni

$$4s^2 + 4x^2 + 12xs = 4 \quad , \quad 2x + 3s = 3 \quad ,$$

dalle quali si ricava  $5s^2 = 5$ ; e perciò, escludendo la soluzione  $s = 1$ ,  $x = 0$ , che darebbe di nuovo il sistema |C|, si conclude  $s = -1$ ,  $x = 3$ . Alle C corrispondono dunque nella I le curve  $3(\gamma_1 + \gamma_2) - C$ ; e le sostituzioni (1) e (2) assumono perciò la forma:

$$(1a) \begin{cases} \gamma'_1 = \gamma_1 \\ \gamma'_2 = \gamma_2 \\ C' = 3\gamma_1 + 3\gamma_2 - C \end{cases} \quad (2a) \begin{cases} x' = x + 3s \\ y' = y + 3s \\ s' = -s \end{cases}$$

Interpretando  $x, y, s$  come coordinate proiettive omogenee di punto nel piano, la sostituzione (2a) è l'omologia armonica di asse  $s = 0$  e centro  $(3, 3, -2)$ .

Lo stesso ragionamento prova altresì che non esiste sopra  $F^4$  nessun'altra trasformazione birazionale che lasci invariati ambo i fasci di cubiche  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ : una tale trasformazione, non potendo essere proiettiva, dovrebbe infatti operare anche sopra |C|, e quindi sopra tutti i sistemi di curve di  $F^4$ , nello stesso modo della I, colla quale perciò coinciderebbe. Del pari, non può esistere sopra  $F^4$  nessuna trasformazione che scambii i due fasci  $|\gamma_1|$  e  $|\gamma_2|$ : invero, il sistema |C| non potrebbe essere mutato in sè, perchè la trasformazione sarebbe proiettiva; dovrebbe dunque essere mutato di nuovo nel sistema  $3(\gamma_1 + \gamma_2) - C$ ; e allora il prodotto di questa (supposta) trasformazione per la I sarebbe a sua volta una proiettività non identica (1).

b) Una trasformazione non periodica  $\Gamma_1$ , la quale lascia ferme tutte le cubiche  $\gamma_1$ , si può costruire nel modo seguente:

Le cubiche  $\gamma_1$  sono incontrate dalla retta  $r_1$  in terne di punti (A, B, C), e dalla retta  $r_2$  in singoli punti (M), dei quali ultimi, sopra una  $\gamma_1$  generica, nessun multiplo è equivalente a un multiplo della terna precedente; ciò avverrebbe soltanto quando il punto di appoggio ad  $r_2$ , contato  $3n$  volte, costituisce per tale cubica l'intersezione *unica* con una curva del suo piano di ordine  $n$  — fosse dunque un suo flesso, oppure punto sestatico, nonatico, ecc. — il che non si verificherà sopra una  $F^4$  generale del tipo considerato. Sarà dunque razionalmente nota sopra le  $\gamma_1$ , e perciò sopra  $F^4$ , la trasformazione

(1) La I, la sostituzione corrispondente al semplice scambio delle  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  (cioè  $x' = y$ ,  $y' = x$ ,  $s' = s$ ), e il loro prodotto, sono, come è ovvio, sulla conica  $f = 0$  e nel suo piano, tre involuzioni od omologie armoniche mutuamente permutabili, formanti, insieme coll'identità, un gruppo  $G_4$  diedrico. Delle tre, la sola I corrisponde a un'effettiva trasformazione birazionale sopra  $F^4$ .

birazionale non periodica rappresentata sulle  $\gamma_1$  dalla relazione di equivalenza fra gruppi di punti <sup>(1)</sup>:

$$P' \equiv P + 3M - (A + B + C) \quad (2) \quad (3) \quad (4).$$

Determiniamo ora la sostituzione (1) corrispondente a questa nuova trasformazione (per la quale sarà ancora  $\gamma'_1 = \gamma_1$ ). Applicando la formola precedente ai due punti intersezioni della curva  $\gamma'_2$ , trasformata di  $\gamma_2$ , colle cubiche  $\gamma_1$ , vediamo che la curva (eventualmente virtuale)

$$\gamma_2 + 6r_2 - 2r_1 \equiv \gamma_2 + 6(C - \gamma_2) - 2(C - \gamma_1) \equiv 2\gamma_1 - 5\gamma_2 + 4C$$

deve segare le  $\gamma_1$  in coppie di punti equivalenti a quelle segate dalla  $\gamma'_2$  cercata; essa non potrà dunque differire dalla  $\gamma'_2$  che per un multiplo della curva stessa  $\gamma_1$  <sup>(5)</sup>. Sarà dunque

$$\gamma'_2 = k\gamma_1 - 5\gamma_2 + 4C,$$

dove il coefficiente incognito  $k$  si può determinare mediante la condizione che sia nullo il grado di  $\gamma'_2$ , ossia  $f(k, -5, 4) = 0$ ; si ha così un'equazione lineare in  $k$ , colla radice  $k = 14$ .

Analogamente, poichè le  $C$ , e conseguentemente le loro trasformate  $C'$ , tagliano le  $\gamma_1$  in 3 punti,  $C'$  potrà differire dalla curva

$$C + 9r_2 - 3r_1 \equiv C + 9(C - \gamma_2) - 3(C - \gamma_1) \equiv 3\gamma_1 - 9\gamma_2 + 7C$$

<sup>(1)</sup> Enriques, *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali*, Rend. R. Acc. dei Lincei, ser. 5<sup>a</sup>, vol. 15 (1906<sub>2</sub>), pag. 665.

<sup>(2)</sup> In altri termini, indicando con  $u$  l'integrale ellittico di 1<sup>a</sup> specie sopra una  $\gamma_1$  generica, e con  $a, b, c, m$  i suoi valori nei punti  $A, B, C, M$ , la trasformazione sarà rappresentata analiticamente da  $u' \equiv u + 3m - (a + b + c) \pmod{2\omega, 2\omega'}$ .

<sup>(3)</sup> Questa trasformazione, mentre non è periodica sopra una  $\gamma_1$  generica, è però tale sopra quelle particolari  $\gamma_1$  per le quali il punto  $M \equiv \gamma_1 r_2$  è punto sestatico, nonatico, ecc.; ed è identica sopra le  $\gamma_1$  per le quali  $M$  è flesso, che sono in numero di otto. Invero, imporre che  $M$  sia flesso per una  $\gamma_1$ , equivale a chiedere che la tangente in  $M$  alla cubica  $\gamma_1$  sia ivi la seconda tangente principale di  $F^4$  (la prima essendo  $r_2$ ). Ora le seconde tangenti principali di  $F^4$  nei punti di  $r_2$  (ossia le tangenti in tali punti alle cubiche  $\gamma_2$ ) formano una rigata di cui  $r_2$  stessa è direttrice semplice, e generatrice quadrupla (in corrispondenza alle 4 cubiche  $\gamma_2$  tangenti a  $r_2$ ), e che ha in ogni piano per  $r_2$  tre generatrici, dunque di ordine otto; e le sue generatrici incidenti a  $r_1$  determinano sopra  $r_2$  i punti  $M$  cercati. — Sopra ogni  $\gamma_1$  sarà infinitesima (in senso aritmetico) una conveniente potenza dell'operazione  $\Gamma_1$ ; potenza il cui esponente varierà però al variare di quella  $\gamma_1$ .

<sup>(4)</sup> Indicando con  $X$  il punto tangenziale di  $M$  sopra ogni singola  $\gamma_1$ , sarà  $2M + X \equiv A + B + C$ ; perciò  $P' \equiv P + M - X$ , ossia  $P' + X \equiv P + M$ . L'operazione  $\Gamma_1$  equivale perciò, sopra ogni  $\gamma_1$ , al prodotto della proiezione doppia da  $M$  e della proiezione doppia da  $X$ ; e, sopra  $F^4$ , al prodotto dell'involuzione  $I$  per un'altra involuzione, che trovasi considerata nella Mem. cit. di Sharpe e Snyder (ponendo ivi  $n = 1$ ).

<sup>(5)</sup> Severi, *Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti di una curva algebrica o tra curve di una superficie*, Atti R. Ist. Veneto, tomo 70 (1910-11), pag. 373; ved. in particolare pag. 380.

solo per un multiplo di  $\gamma_1$ . Sarà dunque  $C' \equiv i\gamma_1 - 9\gamma_2 + 7C$ ; e imponendo che sia eguale a 4 il suo grado, ossia  $f(i, -9, 7) = 4$ , si trova  $i = 31$ .

La trasformazione birazionale  $\Gamma_1$  della superficie  $F^4$  opera dunque sulle curve di questa superficie secondo la sostituzione (1b) qui sotto riportata, che si rispecchia nella sostituzione (2b), di modulo +1, della forma  $f$ :

$$(1b) \begin{cases} \gamma'_1 = \gamma_1 \\ \gamma'_2 = 14\gamma_1 - 5\gamma_2 + 4C \\ C' = 31\gamma_1 - 9\gamma_2 + 7C \end{cases} \quad (2b) \begin{cases} x' = x + 14y + 31z \\ y' = -5y - 9z \\ z' = 4y + 7z \end{cases}$$

c) Un'analoga trasformazione  $\Gamma_2$ , anche non periodica, si ha scambiando i fasci  $|\gamma_1|$  e  $|\gamma_2|$ ; le sue equazioni si ottengono dalle precedenti scambiando  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ ,  $x$  e  $y$ :

$$(1c) \begin{cases} \gamma_1^{(1)} = -5\gamma_1 + 14\gamma_2 + 4C \\ \gamma_2^{(1)} = \gamma_2 \\ C^{(1)} = -9\gamma_1 + 31\gamma_2 + 7C \end{cases} \quad (2c) \begin{cases} x' = -5x - 9z \\ y' = 14x + y + 31z \\ z' = 4x + 7z \end{cases}$$

3. Poichè le operazioni I.  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , e conseguentemente anche i loro prodotti, mutano i fasci di cubiche  $|\gamma_1|$  e  $|\gamma_2|$  in fasci di curve ellittiche sopra  $F^4$ , così, per procurarci una visione generale del gruppo complessivo che nasce da queste operazioni, e per accertare se esso comprenda o meno la totalità delle trasformazioni birazionali di  $F^4$ , sarà utile determinare tutti i fasci di curve ellittiche esistenti sopra  $F^4$ , e perciò le combinazioni  $x\gamma_1 + y\gamma_2 + zC$  che risultano di grado (virtuale) zero; in altri termini, le soluzioni in numeri interi, non tutti nulli, dell'equazione indeterminata

$$f \equiv 4z^2 + 4xy + 6xz + 6yz = 0.$$

Inoltre, poichè i fasci di curve ellittiche che a noi interessano, quali trasformati di  $|\gamma_1|$  e  $|\gamma_2|$ , sono costituiti da curve ellittiche *effettive, irriducibili*, dovranno considerarsi come non rispondenti allo scopo le combinazioni  $x\gamma_1 + y\gamma_2 + zC$  che, pur avendo l'ordine  $3(x+y) + 4z > 0$  e il grado virtuale zero, conducono a sistemi riducibili, cioè a sistemi aventi una parte fissa, oppure composti mediante un fascio. Distinguiamo tali sistemi, per maggior chiarezza, nelle seguenti categorie:

1°. Sistemi composti di un fascio di curve ellittiche (effettive, irriducibili) e di una curva fissa. Tali ad esempio i sistemi  $\gamma_1 + r_2 \equiv C + \gamma_1 - \gamma_2$  e  $\gamma_2 + r_1 \equiv C - \gamma_1 + \gamma_2$ .

2°. Sistemi composti di un sistema effettivo di genere  $> 1$ , grado  $> 0$ , dimensione  $> 1$ , e di una parte fissa, tali tuttavia che la curva complessiva risulti di grado virtuale zero e genere virtuale 1; per esempio il sistema  $C + 2r_1 \equiv 3C - 2\gamma_1$  (e analogamente  $C + 2r_2$ ), e così anche

$$C + 2r_1 + r_2 \equiv 4C - 2\gamma_1 - \gamma_2; \text{ ecc.}$$

3°. Sistemi multipli di un fascio di curve ellittiche effettive irriducibili, oppure anche multipli di un sistema del tipo 1° o 2°. Questo 3° caso è caratterizzato dal fatto che i valori assoluti dei numeri  $x, y, z$  hanno massimo comun divisore  $> 1$ .

I sistemi (di grado virtuale zero) irriducibili, e quelli riducibili delle varie categorie anzidette, anche in corrispondenza ai diversi sottocasi del tipo 3°, formano altrettanti corpi distinti, ciascuno invariante rispetto alle trasformazioni birazionali della superficie  $F^4$  (1). Vedremo in una prossima Nota come, per mezzo delle soluzioni intere dell'equazione  $f=0$ , si possano determinare sopra  $F^4$  tutti i fasci di curve ellittiche effettive ed irriducibili, riconoscendo altresì che ciascuno di questi si ottiene da uno dei due fasci  $|\gamma_1|$  e  $|\gamma_2|$  con un prodotto di operazioni  $I, \Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , e che questi prodotti esauriscono il gruppo birazionale di  $F^4$ .

**Fisica.** — *L'esistenza degli ioni positivi e la teoria elettronica della conducibilità dei metalli.* Nota del Socio O. M. CORBINO.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Esistono invece sostituzioni lineari della forma  $f$ , del tipo (2) (non corrispondenti, naturalmente, a trasformazioni birazionali di  $F^4$ ) tali che la corrispondente sostituzione (1), applicata ai sistemi lineari di  $F^4$ , muterebbe (taluni) sistemi irriducibili in sistemi riducibili, e viceversa. Un esempio è dato dalle sostituzioni

$$(2) \begin{cases} x' = x \\ y' = -x - 2y - z \\ z' = x + 3y + 2z \end{cases} \quad (1) \begin{cases} \gamma'_1 = \gamma_1 - \gamma_2 + C \equiv \gamma_1 + r_2 \\ \gamma'_2 = -2\gamma_2 + 3C \equiv \gamma_2 + 3r_2 \\ C' = -\gamma_2 + 2C \equiv C + r_2. \end{cases}$$

Nel piano  $(x, y, z)$  la (2) è l'omologia armonica di asse  $x + 3y + z = 0$  e centro  $(0, -1, 1)$ .