ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Cecilite è l'antico nome dato da Cordier [1] alle « leucititi » melilitiche, il quale è stato di nuovo proposto per queste roccie [2]. Il nome *albanite* [3] è proposto qui, in sostituzione del vecchio « leucitite », a significare una roccia effusiva composta in parti quasi uguali di leucite ed augite, e con quantità accessorie e trascurabili di plagioclasio, melilite, olivina, magnetite ed apatite.

Matematica. — *Su alcune disequazioni funzionali, e sugli sviluppi in serie che se ne deducono.* Nota di Giulio Andreoli, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

In una Nota precedente [4] abbiamo dimostrato che l'equazione funzionale

$$\sum_1^m f_r(x+a_r t)=0 \qquad (a_p \neq a_q \,, p \neq q)$$

non ammette soluzione, qualora si imponga alle f la condizione di avere modulo massimo finito; e da questo abbiamo dedotto altresì l'unicità dello sviluppo

$$\mathrm{G}(x\,,t)=\sum_1^m g_r(x+b_r t)$$

nelle stesse condizioni.

In questa Nota vogliamo far vedere, partendo dalla disequazione funzionale

$$\left|\sum_1^m f_r(x+a_r t)\right|<\varepsilon \qquad (a_p \neq a_q)\,,$$

come gli stessi risultati possano estendersi (sotto certe condizioni) al caso che si consideri non più un numero finito di termini, bensì un numero infinito.

Dimostreremo, cioè, che non è possibile di soddisfare alla

$$\sum_1^\infty f_r(x+a_r t)=0$$

e che lo sviluppo

$$\mathrm{G}(x\,,t)=\sum_1^\infty g_r(x+b_r t)$$

(1) Cordier, *Description des roches*. Pàris, 1868, pag. 117. Cfr. Comptes rendus, VIII; Congrès géol. int. Paris, 1901, pag. 1051.

(2) Washington, *Roman comagmatic region*, 1906, pag. 140.

(3) Questo nome è stato dato ad un « materiale bituminoso dell'Albania » (cfr. L. J. Spencer, Min. mag., 1913, pag. 352). Vista la sua applicazione ad un minerale di carattere poco esattamente definibile, sembrerebbe lecito di adoperarlo per un tipo di roccia. La radice è già usata per il nome albanese, del sottorango III. 8. 2. 2.

(4) Questi Rendiconti, vol. XXVIII, 2° sem., pag. 223.

è unico, quando si ammetta la uniforme convergenza delle serie considerate, per qualunque valore di x (ossia in tutto l'intervallo $-\infty < x < +\infty$).

Si potrà vedere facilmente come tutte le considerazioni di carattere fisico, svolte nella Nota citata, si estendano a questo caso, e come anzi acquistino maggior significato.

2. Premettiamo il

TEOREMA I. — *Se m funzioni soddisfano alla disequazione funzionale*

$$\left| \sum_{1}^{m} f_r(x + a_r t) \right| \leq \varepsilon$$

(per qualunque x e t), *si ha*

$$f_r(z) = p_r(z) + \varepsilon\, \alpha_r(z),$$

ove $p_r(z)$ *è un certo polinomio di grado* $m-2$, *ed* α_r *una funzione avente modulo minore di* 1.

Per $m = 2$, il teorema si dimostra facilmente. Infatti, dalla espressione

$$|f_1(x + a_1 t) + f_2(x + a_2 t)| < \varepsilon,$$

aumentando x in $x + h$, t in $t + k$, e ponendo poi

$$\lambda_1 = h + a_1 k \quad , \quad \lambda_2 = h + a_2 k,$$

si deduce

$$(1) \qquad |f_1(x + a_1 t + \lambda_1) + f_2(x + a_2 t + \lambda_2)| < \varepsilon;$$

e quindi anche

$$(2) \quad |f_1(x + a_1 t + \lambda_1) - f_1(x + a_1 t) + f_2(x + a_2 t + \lambda_2) - f_2(x + a_2 t)| < 2\varepsilon.$$

Se poniamo ora una volta $h = a_1 \mu$, $k = -\mu$, cioè $\lambda_1 = 0$, ed una seconda volta $h = a_2 \nu$, $k = -\nu$, cioè $\lambda_2 = 0$ (con μ, ν arbitrarî), la precedente diseguaglianza si trasformerà rispettivamente nelle altre due diseguaglianze

$$|f_2(z + \delta) - f_2(z)| < 2\varepsilon$$
$$|f_1(z + \delta) - f_1(z)| < 2\varepsilon,$$

nella prima delle quali si è posto

$$z = x + a_2 t \quad ; \quad \delta = (a_2 - a_1)\,\mu,$$

e, nella seconda,

$$z = x + a_1 t \quad ; \quad \delta = (a_1 - a_2)\,\nu;$$

si scorge che z, δ sono del tutto arbitrarî.

Ora, in generale, se è soddisfatta la

$$|g(z+\delta)-g(z)|<2\varepsilon\,,$$

qualunque sieno z e δ, ciò vuol dire che l'oscillazione massima della funzione g è minore di 2ε; che cioè tale funzione deve essere compresa in una striscia parallela all'asse delle x, avente larghezza $2\varepsilon'$, minore di 2ε.

Nel nostro caso dunque, chiamando con $2\varepsilon_1$, $2\varepsilon_2$ (entrambi minori di 2ε) le larghezze delle due strisce relative alle funzioni f_1, f_2, e chiamando con l_1, l_2 le distanze delle loro rispettive mediane dall'asse x, avremo

$$f_1(z)=l_1+\varepsilon_1\,\alpha_1(z) \qquad |\alpha_1(z)|<1$$
$$f_2(z)=l_2+\varepsilon_2\,\alpha_2(z) \qquad |\alpha_2(z)|<1 \quad \text{c. b. d.}$$

Inoltre, la (1) ci dà

$$|l_1+l_2+\varepsilon_1\,\alpha_1(x+a_1t)+\varepsilon_2\,\alpha_2(x+a_2t)|\leq\varepsilon$$

e si vede agevolmente che l_1+l_2 è compreso nel più piccolo dei due segmenti $(\varepsilon-\varepsilon_1-\varepsilon_2\,,\,\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2)$, $(\varepsilon-\varepsilon_1+\varepsilon_2\,,\,\varepsilon+\varepsilon_1-\varepsilon_2)$.

3. Supponiamo d'aver dimostrata la validità del teorema per l'indice m, e dimostriamo che esso vale ancora per l'indice $m+1$.

Noi supponiamo cioè di aver fatto vedere che sia

$$g_r(z)=q_r(z)+\eta\beta_r(z) \qquad r=1,\dots m\,,$$

in conseguenza della

$$\left|\sum_1^m g_r(x+b_rt)\right|\leq\eta\,,$$

ove q_r indica un polinomio di grado $m-2$.

Consideriamo allora la diseguaglianza

$$\left|\sum_1^{m+1} f_r(x+a_rt)\right|\leq\varepsilon\,;$$

dando ad x ed a t rispettivamente gli incrementi h, k e posto

$$h+a_rk=\lambda_r\,,$$

dalla precedente diseguaglianza si trae

$$\left|\sum_1^{m+1} f_r(x+a_rt+\lambda_r)\right|\leq\varepsilon\,;$$

e da questa, con procedimento simile a quello già seguìto,

$$\left|\sum_1^{m+1}\left\{f_r(x+a_rt+\lambda_r)-f_r(x+a_rt)\right|\right\}\leq 2\varepsilon.$$

Se ora scegliamo h, k in modo che sia, ad es. $\lambda_{m+1} = 0$, il termine che nel sommatorio scritto corrisponde ad $r = m + 1$ si annulla identicamente. E la diseguaglianza precedente diventa dunque

$$\left| \sum_1^m g_r(x + a_r t) \right| \leq 2\varepsilon ,$$

avendo posto ora

$$g_r(x + a_r t) = f_r\big(x + a_r t + (a_r - a_{m+1})\,\chi\big) - f_r(x + a_r t) ,$$

in cui χ è un valore arbitrario.

Ci siamo così ridotti al caso di m funzioni, per il quale sappiamo di poter scrivere

$$g_r(z) = q_r(z) + 2\varepsilon\,\beta_r(z) \qquad |\beta_r(z)| < 1$$

ove q_r è un polinomio di grado $m - 2$.

Dunque, per ogni valore di $c = (a_r - a_{m+1})\,\chi =$ arbitr., si ha

$$f_r(z + c) - f_r(z) = q_r(z) + 2\varepsilon\,\beta_r(z) , \tag{3}$$

ove q_r, β_r dipendono da c.

Ora è evidente che può scriversi

$$q_r(z) = p_r(z + c) - p_r(z),$$

essendo p_r un polinomio di grado $m - 1$.

Se poniamo

$$f'_r(z) = f_r(z) - p_r(z) , \tag{4}$$

e quindi anche

$$f'_r(z + c) = f_r(z + c) - p_r(z + c) ,$$

potremo ricavare dalla (3)

$$f'_r(z + c) - f'_r(z) = 2\varepsilon\,\beta_r(z) ,$$

ed infine, qualunque sieno z e c,

$$| f'_r(z + c) - f'_r(z) | \leq 2\varepsilon .$$

Arriviamo in tal modo ad un'equazione del tutto simile a quella trovata nel caso $m = 2$. E, con le stesse considerazioni allora svolte, giungeremo a scrivere

$$f'_r(z) = l_r + \varepsilon\,\alpha_r(z) \quad ; \quad |\alpha_r(z)| \leq 1 \ , \ l_r = \text{cost.} ,$$

da cui finalmente, per la (4),

$$f_r(z) - p(z) = l_r + \varepsilon \alpha_r(z),$$

cioè

$$f_r(z) = l_r + p_r(z) + \varepsilon \alpha_r(z).$$

Resta così dimostrato il teorema I.

4. Dimostriamo anche il

Teorema II. — *Le funzioni soddisfacenti alla disequazione*

$$\left| \sum^{m} f_r(x + a_r t) \right| \leq \varepsilon$$

ed aventi modulo finito sono del tipo

$$f_r(z) = c_r + \varepsilon \alpha_r(z) \quad ; \quad |\alpha_r(z)| < 1 \,,\; c_r = \text{cost.}\,,$$

ove

$$\sum c_r = 0 \,.$$

In effetti, la soluzione generale di tali disequazioni consta della somma d'un polinomio di grado $m-2$, e d'un prodotto $\varepsilon \alpha_r$; e quindi, se il modulo d'ogni f deve restar finito, dovranno mancare i termini contenenti potenze di z, e quindi la f_r sarà del tipo indicato.

Se in particolare $\varepsilon = 0$, si ritrova $f_r = \text{cost.}$, ritornando così al teorema della Nota citata.

5. Servendoci di tali teoremi, possiamo ora far vedere che, a prescindere dalle soluzioni $f = \text{cost.}$, si ha il

Teorema III. — *Le funzioni f soddisfacenti all'equazione*

$$\sum_1^{\infty} f_r(x + a_r t) = 0$$

sono nulle (o costanti) se si impone ad esse la condizione di rendere la serie uniformemente convergente nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

In effetti, se la serie converge uniformemente, sarà

$$\left| \sum_1^{m} f_r(x + a_r t) \right| < \varepsilon_m \qquad \left(\lim_{m=\infty} \varepsilon_m = 0\right)$$

e quindi, per il teorema II, deve essere

$$f_r(z) = c_r^{(m)} + \varepsilon_m \, \alpha_r^{(m)}(z) \qquad |\alpha_r^{(m)}(z)| < 1, \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

cioè

$$f_r = \lim_{m=\infty} c_r^{m} + \lim_{m=\infty} \varepsilon_m \, \alpha_r^{(m)}(z) = \lim_{m=\infty} c_r^{(m)} = \text{cost.},$$

formola che dimostra l'assunto.

Infine dimostriamo il

Teorema IV. — *Se una funzione* $G(x, t)$ *è sviluppabile in una serie uniformemente convergente in tutto il campo* $(-\infty + \infty)$

$$G(x, t) = \sum_1^\infty f_r(x + a_r t),$$

tale sviluppo è, a meno di costanti additive, unico.

Infatti, una G ammetta i due sviluppi

$$G(x, t) = \sum g_r(x + a_r t) + \sum k_r(x + b_r t) =$$
$$= \sum h_r(x + a_r t) - \sum l_r(x + c_r t),$$

in ciascuno dei quali nel primo sommatorio sono raggruppati i termini aventi coefficienti a eguali a quelli dell'altro sviluppo.

Sottraendo, dal primo sviluppo, il secondo, e posto $d_r = g_r - h_r$, si ha

$$\sum d_r(x + a_r t) + \sum k_r(x + b_r t) + \sum l_r(x + c_r t) = 0$$

identicamente, ove, giusta l'ipotesi, le serie convergono in modo uniforme. Siamo quindi nelle condizioni del teorema III, in virtù del quale le funzioni d, k, l devono essere nulle o costanti; e, a meno di costanti, sarà perciò

$$g_r = h_r \,,\; k_r = 0 \,,\; l_r = 0 \qquad \text{c. b. d.}$$

9. Le precedenti considerazioni dànno origine ad altri problemi: quali p. es. l'effettiva determinazione delle f e delle costanti a, quando sia data una $G(x, t)$; la ricerca delle condizioni di rappresentabilità, ecc.: problemi sui quali ci proponiamo di ritornare.

Meccanica. — *Sulle linee di forza di un ellissoide di rotazione stratificato.* Nota di Tommaso Boggio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Il problema della determinazione delle linee di forza corrispondenti all'attrazione esercitata da una distribuzione di massa, che attrae con legge newtoniana, si può ricondurre, com'è ben noto, alle quadrature, se la massa attraente è distribuita simmetricamente intorno ad un asse, cioè in modo tale che la densità sia costante sopra circonferenze aventi il centro sull'asse e situate su piani normali all'asse stesso.

Una particolare e notevole distribuzione simmetrica di massa si ha nel caso di un ellissoide di rotazione, stratificato omoteticamente; la determinazione delle linee di forza relative è stata fatta dal Betti nel § XXIII della sua opera: *Teorica delle forze newtoniane* ecc. (Pisa, a. 1879), il