ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Infine dimostriamo il

TEOREMA IV. — *Se una funzione* $G(x, t)$ *è sviluppabile in una serie uniformemente convergente in tutto il campo* $(-\infty \ +\infty)$

$$G(x, t) = \sum_1^\infty f_r(x + a_r t),$$

tale sviluppo è, a meno di costanti additive, unico.

Infatti, una G ammetta i due sviluppi

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \sum g_r(x + a_r t) + \sum k_r(x + b_r t) = \\ &= \sum h_r(x + a_r t) - \sum l_r(x + c_r t), \end{aligned}$$

in ciascuno dei quali nel primo sommatorio sono raggruppati i termini aventi coefficienti a eguali a quelli dell'altro sviluppo.

Sottraendo, dal primo sviluppo, il secondo, e posto $d_r = g_r - h_r$, si ha

$$\sum d_r(x + a_r t) + \sum k_r(x + b_r t) + \sum l_r(x + c_r t) = 0$$

identicamente, ove, giusta l'ipotesi, le serie convergono in modo uniforme. Siamo quindi nelle condizioni del teorema III, in virtù del quale le funzioni d, k, l devono essere nulle o costanti; e, a meno di costanti, sarà perciò

$$g_r = h_r, \quad k_r = 0, \quad l_r = 0 \qquad \text{c. b. d.}$$

9. Le precedenti considerazioni dànno origine ad altri problemi: quali p. es. l'effettiva determinazione delle f e delle costanti a, quando sia data una $G(x, t)$; la ricerca delle condizioni di rappresentabilità, ecc.: problemi sui quali ci proponiamo di ritornare.

Meccanica. — *Sulle linee di forza di un ellissoide di rotazione stratificato.* Nota di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il problema della determinazione delle linee di forza corrispondenti all'attrazione esercitata da una distribuzione di massa, che attrae con legge newtoniana, si può ricondurre, com'è ben noto, alle quadrature, se la massa attraente è distribuita simmetricamente intorno ad un asse, cioè in modo tale che la densità sia costante sopra circonferenze aventi il centro sull'asse e situate su piani normali all'asse stesso.

Una particolare e notevole distribuzione simmetrica di massa si ha nel caso di un ellissoide di rotazione, stratificato omoteticamente; la determinazione delle linee di forza relative è stata fatta dal Betti nel § XXIII della sua opera: *Teorica delle forze newtoniane* ecc. (Pisa, a. 1879), il quale estese un procedimento che poco prima aveva dato il Beltrami per determinare le linee di forza di un disco circolare conduttore elettrizzato.

Il metodo seguito dal Betti è piuttosto complicato; si possono però determinare più semplicemente le linee di forza in base alla proprietà che la funzione associata della funzione potenziale del sistema dato è biarmonica; ciò è mostrato nella mia Nota *Sulle funzioni associate e sulle linee di forza di un ellissoide* ecc. (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. XXXVIII, a. 1905).

Si può però ancora semplificare ulteriormente tale determinazione ricorrendo soltanto alla definizione stessa della funzione associata. È ciò che mi propongo di dimostrare in questo breve scritto.

***

1. Sia V la funzione potenziale di una distribuzione di massa, simmetrica rispetto ad un asse, che assumeremo per asse delle z. Chiamando poi u la distanza di un punto qualunque P dall'asse Oz, e z la quota di P, la V, nei punti P esterni alla massa attraente, è notoriamente funzione armonica, e soddisfa, come ha già mostrato Laplace [1] nel 1787, all'equazione

$$\frac{1}{u}\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0\,,$$

la quale può scriversi

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial V}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial V}{\partial z}\right)=0\,;$$

perciò si può porre, com'è notissimo,

$$(1)\qquad u\frac{\partial V}{\partial u}=-\frac{\partial W}{\partial z}\,,\quad u\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{\partial W}{\partial u}\,,$$

ove W è una funzione, per ora arbitraria, di u e z; essa si chiama *funzione associata* della V. Eliminando fra le (1) la V, si trova che W deve soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}-\frac{1}{u}\frac{\partial W}{\partial u}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}=0\,,\qquad \text{cioè}\quad \Delta W=2\,\frac{1}{u}\frac{\partial W}{\partial u}$$

od anche, per la seconda delle (1), $\Delta W=2\,\dfrac{\partial V}{\partial z}$; ne segue $\Delta\Delta W=0$, perciò *la funzione associata* W *è biarmonica.*

[1] Laplace, *Sur la théorie de l'anneau de Saturne*, Oeuvres complètes, tome 11, pag. 278.

Ricordando poi che all'infinito la $\frac{\partial V}{\partial u}$ è infinitesima di 2° ordine, deduce, dalla prima delle (1), $\lim_{u \to \infty} \frac{\partial W}{\partial z} = 0$; e poichè all'infinito la W è finita, si può scrivere pure

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\lim_{u \to \infty} W\right) = 0. \tag{2}$$

Poichè le linee di forza corrispondenti alla distribuzione simmetrica considerata giacciono su piani passanti per l'asse Oz, è facile vedere che l'equazione delle linee di forza, in un piano meridiano qualunque, è $W = \text{cost}$; infatti, l'equazione delle linee di forza è

$$\frac{\partial V}{\partial z}\, du - \frac{\partial V}{\partial u}\, dz = 0\,; \quad \text{cioè, per le (1),} \quad \frac{\partial W}{\partial u}\, du + \frac{\partial W}{\partial z}\, dz = 0\,,$$

ossia $dW = 0$, onde $W = \text{cost.}$

2. Consideriamo ora l'ellissoide σ, di rotazione intorno all'asse Oz:

$$\frac{u_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0\,,$$

e sia $P(u, z)$ un punto esterno all'ellissoide; ponendo allora, colle notazioni del Betti,

$$H = 1 - \frac{u^2}{a^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda}\,, \tag{3}$$

e indicando con λ_1 la maggior radice dell'equazione quadratica

$$H_1 = 1 - \frac{u^2}{a^2 + \lambda_1} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda_1} = 0\,, \tag{4}$$

la funzione

$$V(u, z) = \pi a^2 c \int_{\lambda_1}^{\infty} F(H) \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{c^2 + \lambda}} \tag{5}$$

rappresenta, in tutto lo spazio esterno a σ, la funzione potenziale di due masse; una a tre dimensioni, l'altra a due (distribuita su σ), la prima delle quali riempie tutto lo spazio racchiuso da σ colla densità, nel punto $M(u_1, z_1)$:

$$\varrho = F'(H)_{u=u_1,\, z=z_1}\,.$$

Ciò posto, dalla seconda delle (1) e dalla (5) risulta

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \pi a^2 c \left\{ \int_{\lambda_1}^{\infty} F'(H) \frac{\partial H}{\partial z} \frac{u\, d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{c^2 + \lambda}} - \right. \tag{6}$$

$$\left. - F(0) \frac{1}{(a^2 + \lambda_1)\sqrt{c^2 + \lambda_1}}\, u \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} \right\};$$

ora conviene evidentemente trasformare il secondo membro in modo da farlo apparire una derivata rispetto ad u; perciò bisogna esprimere le derivate di H e di λ_1, rispetto a z, mediante le derivate rispetto ad u. A questo riguardo, osserviamo che si hanno le due identità

$$(7)\qquad \frac{u}{a^2+\lambda}\frac{\partial H}{\partial z}=\frac{z}{c^2+\lambda}\frac{\partial H}{\partial u}\,,\qquad \frac{u}{a^2+\lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial z}=\frac{z}{c^2+\lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial u}\,;$$

infatti, dalla (3) si ha, derivando rispetto a z e ad u,

$$\frac{\partial H}{\partial z}=\frac{2z}{c^2+\lambda}\,,\qquad \frac{\partial H}{\partial u}=\frac{2u}{a^2+\lambda}\,,$$

da cui segue senz'altro la prima delle (7); similmente dalla (4) si ha

$$-\frac{2z}{c^2+\lambda_1}+\frac{\partial H_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial z}=0\,,\qquad -\frac{2u}{a^2+\lambda_1}+\frac{\partial H_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial u}=0\,,$$

da cui risulta subito la seconda delle (7).

Sostituendo nella (6) alle derivate di H e di λ_1 i valori dati dalle (7), risulta

$$\frac{\partial W}{\partial u}=\pi a^2 c\left\{\int_{\lambda_1}^{\infty}F'(H)\,z\,\frac{\partial H}{\partial u}\frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{c^2+\lambda}}-F(0)\frac{1}{(c^2+\lambda_1)\sqrt{c^2+\lambda_1}}\,z\,\frac{\partial \lambda_1}{\partial u}\right\},$$

ossia

$$\frac{\partial W}{\partial u}=\pi a^2 c\,\frac{\partial}{\partial u}\int_{\lambda_1}^{\infty}z\,F(H)\frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{c^2+\lambda}}\,;$$

ne segue

$$(8)\qquad W=\pi a^2 c\int_{\lambda_1}^{\infty}z\,F(H)\frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{c^2+\lambda}}+f(z)\,,$$

ove $f(z)$ è una funzione da determinarsi. Ricorrendo poi alla (2), si trae $\frac{df(z)}{dz}=0$; quindi $f(z)$ deve essere una costante, che si può supporre nulla; perciò la (8) fornisce senz'altro, per $f(z)=0$, la funzione associata W.

Osservazione. Collo stesso procedimento si possono determinare le funzioni associate di altre funzioni potenziali simmetriche.

Così, ad es., se ϱ è la distanza del punto P dall'origine, e si prende $V=\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{\varrho}$ $(n\geq 0)$, si ha, dalla seconda delle (1),

$$\frac{\partial W}{\partial u}=u\,\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\frac{1}{\varrho}=\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\frac{u}{\varrho}=\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\frac{\partial \varrho}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^{n+1}\varrho}{\partial z^{n+1}}\,,$$

quindi

$$W=\frac{\partial^{n+1}\varrho}{\partial z^{n+1}}+f(z)\,,$$

e, ricorrendo alla (2), si trae che $f(z)$ è una costante, che si può supporre nulla; così si ha W.