ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Le latitudini, in gradi, nei due punti, sono risp. $42^\circ\,7'\,16''\cdot27$ e $43^\circ\,1'\,44''\cdot87$; la differenza di longitudine è $0^\circ\,36'\,25''\cdot48$; sicchè abbiamo

$$\Phi = 0\cdot0158466200\,,\quad \log\Phi = \bar{2}\cdot19993664\,;$$
$$\Omega = 0\cdot0105955059\,,\quad \log\Omega = \bar{2}\cdot02512170\,.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} &\log \operatorname{sen}\varphi_0 = \bar{1}\cdot8265289\,, && \log\cos\varphi_0 = \bar{1}\cdot8702446\,, && \log\operatorname{sen}\varphi = \bar{1}\cdot8340200\,,\\ &\log\cos\varphi = \bar{1}\cdot8639215\,, && \log a = 6\cdot8046435\,, && \log e^2 = \bar{3}\cdot8244104\,,\\ &\log r_0 = 6\cdot6755410\,, && \log\varrho_0 = 6\cdot8036940\,, && \log N_0 = 6\cdot8052964\,,\\ &\log r = 6\cdot6692409\,. \end{aligned}$$

Con questi dati si trova

$$p = 0\cdot01587566\,,\quad \log p = \bar{2}\cdot2007318\,;$$
$$q = 0\cdot01044328\,,\quad \log q = \bar{2}\cdot0188369\,.$$

Segue, dalla (7),

$$\log \operatorname{tg}\alpha_0 = \bar{1}\cdot6899521\,,\quad \alpha_0 = 26^\circ\,5'\,31''\cdot7\,,$$

in perfetto accordo col valore trovato dal Pizzetti.

Per s si trova, tanto dalle (4) quanto dalla (8),

$$\log s = 5\cdot0511069\,;$$

e per α,

$$\log\operatorname{sen}\alpha = \bar{1}\cdot6495711\,,\quad \alpha = 26^\circ\,30'\,10''\cdot4\,.$$

Meccanica. — *Forze di pressione su un montante di aeroplano.* Nota I di MARIO PASCAL, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO.

Fra i diversi metodi escogitati per calcolare la resistenza che incontra un ostacolo investito da una corrente fluida, è notevole quello che si basa sul teorema di Joukowski [1], teorema che dà l'espressione della cosidetta *forza sostentatrice* come il prodotto della circuitazione delle velocità lungo il contorno dell'ostacolo, per la grandezza V_0 del vettore che rappresenta la velocità limite della corrente e per la densità del fluido.

Assegnata, mediante una funzione di variabile complessa, una corrente per la quale sia nota la circuitazione lungo un contorno circolare, il problema di trovare la circuitazione lungo un particolare profilo (problema cui

[1] N. Joukowski, *Aérodynamique* [trad. par S. Drzewiecki], Paris, Gauthier-Villars, 1916.

in sostanza si riduce quello di calcolare la forza sostentatrice) sarà risoluto quando, mediante rappresentazioni conformi, da una circonferenza ci si sarà ridotti al profilo da prendere in esame.

Il Joukowski, il Kutta, il Tchapliguine hanno determinato con metodo simile il valore della forza sostentatrice agente su diversi profili che si avvicinano a quello tipico dell'ala di aeroplano. Scopo di questo lavoro è invece quello di trovare un contorno che possa essere adottato come sezione retta di un montante di aeroplano, e calcolare per esso quella che chiameremo ancora *forza sostentatrice*, quantunque nel caso presente una tale dizione abbia perduta la sua principale ragione d'essere.

In questa Nota I troveremo il contorno voluto come risultato di tre successive rappresentazioni conformi.

1. Consideriamo la funzione

$$w = (z_1^2 + a) / z_1 \,, \tag{1}$$

dove si suppone la costante a reale, positiva, < 1, e che definisce fra i piani $z_1 = x_1 + iy_1$ e $w = \xi + i\eta$ una tale rappresentazione conforme che all'asse reale $\eta = 0$ del piano w corrispondono sul piano z_1 l'asse reale $y_1 = 0$ ed una circonferenza col centro nell'origine e di raggio $\sqrt{a}$. Mediante la (1), troviamo la trasformata di una circonferenza di raggio unitario e tangente nell'origine all'asse $x_1 = 0$; posto perciò nella (1)

$$z_1 = 1 + e^{i\alpha},$$

si ricava facilmente

$$\cos\alpha = \xi - a/2 - 1$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \eta(2\xi - a)/2(\xi - a) \,,$$

da cui, eliminando α,

$$\eta^2 = (\xi - a)^2 (a + 4 - 2\xi) / (2\xi - a) \tag{2}$$

che è *l'equazione della curva trasformata sul piano w*. Tale curva è — come è facile persuadersi — simmetrica rispetto all'asse reale, e lo incontra nei punti $\xi = a$ e $\xi = 2 + a/2$, di cui il primo è punto doppio. Infatti, dicendo $f(\xi, \eta)$ la (2) eguagliata a zero, le due derivate

$$\partial f / \partial\xi = 2\eta^2 + 2(\xi - a)(2\xi - a - 4) + 2(\xi - a)$$
$$\partial f / \partial\eta = 2\eta(2\xi - a)$$

si annullano per $\xi = a$, $\eta = 0$.

Inoltre la curva (2) ammette un assintoto nella retta perpendicolare all'asse reale e di ascissa $\xi = a/2$.

Derivando la (2) rispetto a η, si ottiene

$$(3) \quad \eta' = [\{a+4-2\xi\}\{2\xi-a\} - \{\xi-a\}(\{2\xi-a\}+\{a+4-2\xi\})] \times \\ \times [\{2\xi-a\}^{-3/2}\{a+4-2\xi\}^{-1/2}]$$

e, sostituendo in tale espressione il valore $\xi = a$,

$$\eta' = [\{a+4-2\xi\}\{2\xi-a\}][\{2\xi-a\}^{-3/2}\{a+4-2\xi\}^{-1/2}] = \\ = [4/a-1]^{1/2} = \operatorname{tg}\varphi$$

che è il valore della tangente trigonometrica dell'angolo che ciascuna delle due tangenti alla curva nel punto doppio fa con l'asse reale. Per la costruzione grafica di tale angolo si può notare che esso è uguale all'angolo sotto il quale sul piano z_1 si tagliano la data circonferenza unitaria e quella fondamentale di raggio $\sqrt{a}$.

Uguagliando a zero il numeratore della (3), si ricava

$$\xi = (a+1)/2 \pm (2a+1)^{1/2}/2 ;$$

vi sono dunque, su ciascuno dei due rami simmetrici della curva, due punti in cui la tangente è parallela all'asse reale. Uno di essi però, e precisamente quello corrispondente al segno negativo del secondo termine della espressione precedente, è immaginario.

È poi facile vedere che la curva in esame ha una sola tangente perpendicolare all'asse reale, ed è quella nel punto $\xi = 2 + a/2$, e che infine i rami reali della curva sono tutti compresi fra tale tangente e l'assintoto $\xi = a/2$. Infatti, per un valore di ξ maggiore di $2 + a/2$, la (2) fornisce per η valori immaginarî.

Tenendo conto di quanto si è detto, la (2) può facilmente essere disegnata: essa risulta essere una curva a cappio, di forma simile a quella della cissoide.

La corrispondenza fra la circonferenza unitaria data sul piano z_1 e la sua trasformata sul piano w è tale che all'arco di cerchio A'O corrisponde il ramo $af\infty$; all'arco di cerchio A''O, il ramo $ae\infty$; mentre al rimanente arco A'BA'' corrisponde il cappio $ac'bc''a$.

È appunto tale cappio che noi assumeremo come profilo della sezione retta di un montante di aeroplano, e che noi dovremo ritrovare come il trasformato, non di un solo arco, ma di una intiera circonferenza.

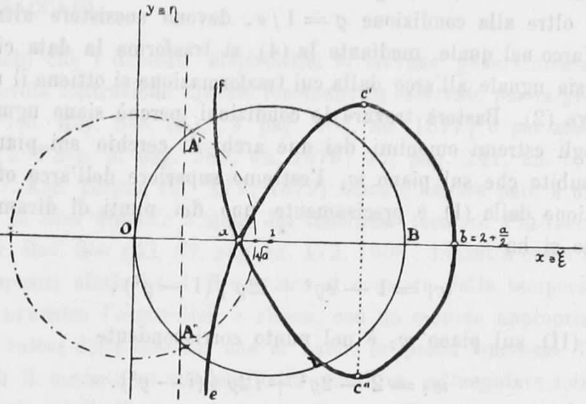
2. Per ottenere un tale risultato, consideriamo la relazione

$$(4) \qquad w_1 = gz[(z+e)/(z+g)]$$

dove g ed e sono quantità reali e positive tali che

$$e > g \quad ; \quad eg = 1 .$$

La (4) definisce fra i due piani z e w_1 (sul quale è stata al solito distesa la Riemanniana) una siffatta rappresentazione conforme che gli assi reali dei due piani si corrispondono fra loro, e che inoltre la retta sul piano w_1 parallela all'asse immaginario e di ascissa $1 - 2g^2$ è la trasformata della retta sul piano z di ascissa $-g$ e della circonferenza che ha il centro nel punto $(-g, 0)$ ed ha per raggio $\sqrt{(1-g^2)}$.



È facile rendersi conto che, mediante la (4), una circonferenza data sul piano z, di raggio unitario e col centro nell'origine, si trasforma sul piano w_1 in un arco di circonferenza di raggio unitario e col centro nell'origine. L'apertura di tale arco è data dal doppio dell'angolo sotto il quale sul piano z si vedono dal punto $(-e, 0)$ le intersezioni della retta di ascissa $-g$ con la circonferenza data di raggio unitario.

Lo scopo che ci siamo prefissi sarà subito raggiunto se consideriamo le tre trasformazioni

$$\text{(I)} \qquad w_1 = \varphi(z) = gz\,[(z+e)/(z+g)]$$

$$\text{(II)} \qquad w_2 = z_2 + 1$$

$$\text{(III)} \qquad w = f(z_1) = (z_1^2 + a)/z_1$$

di cui la (I) e la (III) sono quelle precedentemente considerate, e la (II) è una semplice traslazione che trasporta una circonferenza che sul piano z_2 ha il centro nell'origine in un'altra uguale alla precedente, ma avente sul piano w_2 il centro nel punto $(1, 0)$.

Riunendo le tre trasformazioni in una sola espressione, cioè ponendo

$$w_1 = z_2$$

$$z_1 = w_2 = w_1 + 1 = (gz^2 + egz + z + g)/(z+g),$$

si ha

$$w = (gz^2 + 2z + g)/(z + g) + a(z + g)/(gz^2 + 2z + g) \tag{5}$$

che è *la funzione mediante la quale una circonferenza di raggio unitario e col centro nell'origine del piano z si trasforma nel ramo chiuso della curva* (2).

3. Fra le costanti e, g, a che entrano rispettivamente nella (4) e nella (1), oltre alla condizione $g = 1/e$, devono sussistere altre relazioni affinchè l'arco nel quale, mediante la (4), si trasforma la data circonferenza unitaria, sia uguale all'arco dalla cui trasformazione si ottiene il ramo chiuso della curva (2). Basterà trovare le condizioni perchè siano uguali le coordinate degli estremi omonimi dei due archi di cerchio sui piani w_2 e z_1. Si vede subito che sul piano w_1 l'estremo superiore dell'arco ottenuto dall'applicazione della (I) è precisamente uno dei punti di diramazione. Per tale punto si ha

$$w_1 = 1 - 2g^2 + i2g\sqrt{(1 - g^2)},$$

cioè, per (II), sul piano w_2 è nel punto corrispondente

$$w_2 = 2 - 2g^2 + i2g\sqrt{(i - g^2)}. \tag{6}$$

Applicando invece la (III), per l'estremo superiore dell'arco che si trasforma nel cappio, dovendo tale estremo corrispondere al punto $(a, 0)$, si ha

$$w = (z_1^2 + a)/z_1 = a,$$

cioè

$$z_1 = a/2 \pm \sqrt{(a^2 - 4a)}/2;$$

rigettando il segno negativo che spetta all'estremo inferiore dello stesso arco [cui ugualmente corrisponde il punto $(a, 0)$ sul piano w], ed essendo per ipotesi $a < 1$, si ha

$$z_1 = a/2 + i\sqrt{(4a - a^2)}/2. \tag{7}$$

Uguagliando (6) e (7), si ricava facilmente

$$g^2 = 1 - a/4 \tag{8}$$

che è la relazione cercata.