ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Matematica. — *Sur un théorème de Liapounoff*. Nota di A. Rosenblatt, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla ricerca delle funzioni primitive*. Nota I di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

Il problema della ricerca delle funzioni primitive — problema da cui ebbe origine il Calcolo integrale — è stato in particolar modo studiato e approfondito, in quest'ultimo ventennio, da numerosi analisti, alcuni dei quali (il Lebesgue e il Denjoy) hanno foggiato gli strumenti di calcolo necessarî e sufficienti alla sua completa risoluzione.

Conosciuta la derivata di una funzione, si tratta di determinare questa funzione. Tale determinazione era già possibile, nel secolo scorso, per le funzioni dotate di derivata continua (Cauchy) o, più generalmente, limitate e integrabili nel senso di Riemann; ma ben si conoscevano (Volterra) funzioni aventi derivata non integrabile nel senso detto, pur essendo questa derivata sempre limitata, e rimaneva perciò ancora insoluto il problema nel caso generale. L'introduzione dell'integrale del Lebesgue — avvenuta sul principio del secolo attuale — risolse d'un tratto il nostro problema, nel caso della derivata limitata. Se $f(x)$ ha, in ogni punto di un intervallo (a, b), la derivata $f'(x)$ limitata, l'integrale del Lebesgue della $f'(x)$ dà, a meno di una costante, la funzione primitiva; si ha cioè la formula fondamentale

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(x)\, dx, \tag{1}$$

valida per ogni x di (a, b).

La risoluzione, così ottenuta, del problema, nel caso detto, portò con sè anche quella di un problema più generale che, sul declinare del secolo scorso, era andato ponendosi (Dini, Volterra, Scheeffer ecc.) nello svolgersi degli studî critici sui fondamenti dell'Analisi infinitesimale. Stabilito il concetto di numero derivato (destro e sinistro, superiore e inferiore), come generalizzazione di quello di derivata, la questione che veniva naturalmente a porsi era quella della determinazione (a meno di una costante) della funzione primitiva in base alla conoscenza di uno dei suoi numeri derivati.

Tale questione, che già l'integrale di Riemann aveva risolto nei limiti stessi in cui aveva risoluta quella relativa alla derivata, venne completamente esaurita, dall'integrale del Lebesgue, per le funzioni dotate di numeri derivati limitati, per le quali la formula (1) risultò valida, con la sostituzione della $f'(x)$ con un numero derivato. E l'integrale del Lebesgue offrì la soluzione del problema pure in un caso più generale del precedente, quello cioè delle funzioni primitive *assolutamente continue* [1], nel quale conserva piena validità la formula (1), applicata ad un numero derivato in luogo della derivata $f'(x)$.

Esistono peraltro funzioni aventi derivata finita in ogni punto dell'intervallo che si considera e non assolutamente continue, per le quali dunque non può valere la formula (1); di più, la derivata, in questo caso, non è neppure integrabile nel senso di Lebesgue. Si appalesò quindi la necessità di istituire un nuovo procedimento di calcolo che permettesse di superare anche questa difficoltà. Tale procedimento fu ideato dal Denjoy e fu da lui chiamato di *totalisation*: noi lo chiameremo *procedimento d'integrazione alla Denjoy*. Con esso il Denjoy risolse il nostro problema nel caso del numero derivato dato sempre finito.

Non risulta però ancora esaurita la ricerca. Restano da esaminarsi le funzioni con derivata o, più generalmente, col dato numero derivato non sempre finito. Ma qui è necessario, prima di tutto, di precisare meglio il problema da risolvere. In tutti i casi sino ad ora esaminati, il problema ammette una sola soluzione, come risulta da un noto teorema di Scheeffer; quando, invece, si considerano numeri derivati non sempre finiti, il problema può ammettere infinite soluzioni e riuscire così indeterminato. Se, infatti, la funzione $f(x)$ ha, per es., il numero derivato destro superiore uguale a $+\infty$ $(-\infty)$ in tutti i punti di un insieme perfetto P [2], aggiungendo ad essa una funzione $\varphi(x)$ costante in tutti gli intervalli contigui a P e

[1] Le funzioni *assolutamente continue* (Vitali) costituiscono una classe comprendente quella delle funzioni a numeri derivati limitati, e la loro proprietà caratteristica si ottiene con una semplice generalizzazione della proprietà caratteristica di queste ultime funzioni. Per le funzioni a numeri derivati limitati si ha infatti, come proprietà caratteristica, la seguente: preso un numero positivo σ, ad arbitrio, è sempre possibile determinarne un altro μ, tale che si abbia $|\Sigma\{f(\beta_i)-f(\alpha_i)\}|<\sigma$, per qualsiasi sistema di un numero finito qualunque di intervalli (α_i, β_i), *distinti o no*, appartenenti all'intervallo (a, b) su cui si considera la $f(x)$, e di lunghezza totale minore di μ. Per le funzioni assolutamente continue si ha invece: preso un numero positivo σ, ad arbitrio, è sempre possibile determinarne un altro μ, tale che si abbia $|\Sigma\{f(\beta_i)-f(\alpha_i)\}|<\sigma$, per qualsiasi sistema di un numero finito qualunque di intervalli (α_i, β_i), *senza parti comuni*, appartenenti all'intervallo (a, b) su cui si considera la $f(x)$, e di lunghezza totale minore di μ.

[2] Esempî di tali funzioni furono dati da H. Hahn, B. Levi, ecc.

sempre crescente (decrescente) a destra di ogni punto di tale insieme che non sia primo estremo di un intervallo contiguo, la somma $f(x) + \varphi(x)$ ha il numero derivato destro superiore sempre uguale a quello della $f(x)$, pur non differendo da questa funzione soltanto per una costante. Se dunque si vuole che il nostro problema ammetta una soluzione unica, si è costretti ad enunciarlo nel seguente modo:

Determinare, a meno di una costante, una funzione continua, noto che sia un suo numero derivato [1], *sotto la condizione che nessuno dei due insiemi di punti* $E_{+\infty}$, $E_{-\infty}$ *in cui tale numero derivato assume i valori* $+\infty$ e $-\infty$, *rispettivamente, contenga un insieme perfetto.*

In una Nota, pubblicata in questi Rendiconti ed avente il medesimo titolo della presente [2], esposi un metodo di dimostrazione della formula (1), per le funzioni assolutamente continue, del tutto diverso da quelli che all'uopo già erano stati proposti, metodo che mi sembra ponga bene in luce la ragione della validità della formula stessa. In questa Nota, e in altre due che la seguiranno fra breve, mi propongo di mostrare, valendomi semplicemente della formula detta, che *il procedimento di integrazione alla Denjoy permette di risolvere in modo completo il problema sopra enunciato*, e che *il problema stesso ammette sempre una sola soluzione*. Forse ciò si può anche ottenere con un accurato esame dei risultati stabiliti nel poderoso studio del Denjoy sulla derivazione e il suo calcolo inverso [3], la cui lettura peraltro, data la lunghezza del lavoro, riesce alquanto laboriosa. Ad ogni modo non è privo di interesse, pure nel caso dei numeri derivati sempre finiti, l'avere una dimostrazione diretta della possibilità di ottenere la primitiva col procedimento del Denjoy.

Risulterà poi, da quanto verrò esponendo, che il calcolo della primitiva può eseguirsi anche se, in un insieme di punti di misura nulla, non è effettivamente conosciuto il valore del numero derivato considerato, e ne seguirà la proposizione:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione continua sia determinata, a meno di una costante, da un suo numero derivato, è che:

1°) *questo numero derivato sia conosciuto quasi dappertutto;*

2°) *nessuno dei due insiemi di punti, in cui esso assume i valori di* $+\infty$, $-\infty$, *contenga un insieme perfetto.*

(1) Di lato e rango fissi.

(2) Vol. XXV, 1916, 1° sem., pp. 163-170.

(3) Il lavoro è diviso in tre parti: « Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues » (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1915, pp. 161-248); « Mémoire sur les fonctions dérivées sommable » (Bulletin de la Société Mathématique de France, 1915, pp. 161-248); « Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non sommables » (Annales scientifiques de l'Ecole norm. supérieure, 1916, pp. 127-222; 1917, pp. 181-238).

In questo enunciato, alla seconda condizione si può sostituire l'altra, apparentemente più restrittiva, che cioè non contenga un insieme perfetto l'insieme dei punti in cui il numero derivato è in modulo uguale a $+\infty$.

1. Dato un insieme perfetto P di punti di una retta, chiameremo *porzione* di tale insieme ogni insieme perfetto composto tutto di punti di P e tale che, detti α e β i suoi estremi, ad esso appartengano *tutti* i punti di P compresi fra α e β.

Ciò premesso, sia $f(x)$ una funzione finita e continua, data in tutti i punti di un intervallo (a, b), e ri supponga, fino ad avviso in contrario, che il suo numero derivato superiore destro $\Lambda_d(x)$ — che indicheremo semplicemente con $\Lambda(x)$ — sia sempre finito o tutt'al più uguale a $-\infty$ in un insieme di punti $E_{-\infty}$ che *non* contenga nessun insieme perfetto.

In ogni insieme perfetto P *di punti di* (a, b), *esiste sempre una porzione sulla quale* $\Lambda(x)$ *ammette un limite superiore finito.*

Indichiamo, infatti, con $R(x)$ il limite superiore del rapporto incrementato

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{2}$$

per tutti gli h soddisfacenti alla doppia disuguagliauza $0 < h \leq b - x$. Questa $R(x)$ risulta definita per ogni x di (a, b), escluso l'estremo b, e, per l'ipotesi fatta su $\Lambda(x)$, ha sempre valore finito. Ed invero, essendo $\Lambda(x) < +\infty$, per ogni h positivo e minore di un δ opportuno, dipendente da x, il rapporto incrementale (2) è minore di $\Lambda(x) + 1$, se $\Lambda(x) > -\infty$; e minore di zero, in caso contrario. Per tutti gli h tali che $\delta \leq h \leq b - x$, la (2), tenuto fisso x, è funzione continua di h ed ammette un massimo finito $M(x)$. È dunque $R(x) < \Lambda(x) + M(x) + 1$, se $\Lambda(x) > -\infty$; e $R(x) \leq |M(x)|$, in caso contrario.

La $R(x)$ è, inoltre, semicontinua inferiormente in ogni punto di (a, b), secondo estremo escluso. Infatti, considerato un x_0 qualunque di (a, b), distinto da b, e preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, abbiamo, per almeno un valore h_0, tale che $0 < h_0 < b - x_0$, $f(x_0 + h_0) - f(x_0) > h_0[R(x_0) - \varepsilon]$.

La funzione di x, $\dfrac{f(x+h_0)-f(x)}{h_0}$, essendo continua, si può determinare su $\sigma > 0$ in modo che si abbia, per tutti gli x di (a, b) soddisfacenti alla $|x - x_0| \leq \sigma$, $f(x + h_0) - f(x) > h_0[R(x_0) - \varepsilon]$.

Per gli x indicati è allora $R(x) > R(x_0) - \varepsilon$, ciò che prova la semicontinuità inferiore della $R(x)$.

Siccome è sempre $\Lambda(x) \leq R(x)$, basterà dimostrare per la $R(x)$ la proprietà affermata per la $\Lambda(x)$.

Supponiamo dunque che tale proprietà non valga per la $R(x)$ e cioè che, presi comunqne un numero N ed una porzione di P, esista sempre in

questa porzione qualche punto in cui sia $\Lambda(x) > N$. Per la semicontinuità inferiore della $R(x)$ esiste allora, in ogni porzione di P, un'altra porzione in ogni punto della quale è $\Lambda(x) > N$. Poniamo $N = 1$ e consideriamo tutte le porzioni di P in ogni punto delle quali è $\Lambda(x) > 1$. Chiamata lunghezza di un insieme di punti di una retta quella del minor segmento che lo contiene, indichiamo con $2l$ il limite superiore delle lunghezze delle porzioni di P indicate e con q_1 il limite inferiore dei primi estremi delle porzioni di lunghezza $\geq l$. È evidente che, nel segmento (q_1, q_2) di (a, b), che ha per primo estremo q_1 e lunghezza $= l$, esistono infiniti punti di P che hanno per punto limite q_1 e che in tutti i punti di P appartenenti a (q_1, q_2), escluso al più q_1, è $\Lambda(x) > 1$. Si ponga $q^{(2)}$ uguale a q_2, se q_2 è punto limite di punti di P interni a (q_1, q_2), e uguale al limite superiore di tali punti, in caso contrario; si ponga poi $q^{(1)}$ uguale al limite inferiore dei punti di P che si trovano a destra del punto di mezzo di $(q_1, q^{(2)})$. I punti di P che appartengono al segmento $(q^{(1)}, q^{(2)})$ costituiscono una porzione P_1 di P e in essi è sempre $\Lambda(x) > 1$.

Seguendo il procedimento qui indicato per la determinazione di P_1, determiniamo la porzione P_2 di P_1 in cui è sempre $\Lambda(x) > 2$; poi quella P_3 di P_2 in cui è sempre $\Lambda(x) > 3$; e così via indefinitamente. Ciascuno degli insiemi perfetti $P, P_1, P_2, P_3, \ldots$ è contenuto in quelli che lo precedono, ed esiste perciò almeno un punto p che appartiene a tutti i P_n. In p deve essere $\Lambda(p) = +\infty$, perchè in ogni punto di P_n è $\Lambda(x) > n$, è ciò contraddice all'ipotesi fatta che sia sempre $\Lambda(x) < +\infty$.

Fisica. — *Relazione tra resistenza elettrica e tensioni nel bismuto* [1]. Nota del dott. Enrico Zavattiero, presentata dal Corrisp. M. Cantone.

Tra le note proprietà possedute dal bismuto, presentano speciale importanza l'elevato potere termoelettrico, il suo comportamento rispetto al fenomeno di Hall, lo scarto della legge di Wiedemann e Franz, il forte diamagnetismo ed il grande aumento della resistenza nel campo magnetico. Mi è sembrato pertanto non privo d'interesse, l'esame comparativo del comportamento elastico del bismuto assoggettato a forze di trazione e delle corrispondenti variazioni della sua resistenza elettrica, essendo noto che questa fornisce utili indicazioni sulle modificazioni di struttura, specie se si manifestano anomalie come nel caso del nichelio sottoposto a trazione [2]. Le costanti ela-

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Napoli.

[2] Tomlison, Phyl. trans. of the Roy. Soc. parte I, 1883; M. Cantone, Rend. R. Accademia dei Lincei 1897, vol. VI, ser. 5ª, pag. 175.