ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Ferie Accademiche.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali.* Nota II del Corrispondente GINO FANO [1].

4. La risoluzione in numeri interi di un'equazione omogenea di 2° grado fra 3 variabili, a coefficienti anche interi, si trova effettuata in lavori classici, e, fra questi, già nelle *Disquisitiones arithmeticae* di Gauss (art. 299, III) [2]. Per l'equazione considerata nella Nota precedente [3],

$$f \equiv 4z^2 + 4xy + 6xz + 6yz = 0$$

poichè f contiene x (e così anche y) solo a primo grado, si ricava $x = -\dfrac{2z^2 + 3yz}{2y + 3z}$; perciò, per valori interi arbitrarî di y e z (tali che $2y + 3z \neq 0$), si ricava *un* valore razionale di x, il quale, insieme coi precedenti, soddisfa l'equazione $f = 0$; tale terna può rendersi intera (se x è fratto), moltiplicandola per un conveniente medesimo intero. Si hanno così tutte le soluzioni intere di $f = 0$, per le quali $2y + 3z \neq 0$; mentre per $2y + 3z = 0$ si ha soltanto $y = z = 0$, x arbitrario. Queste soluzioni sono compendiate nelle formole di Gauss:

$$(3) \qquad \begin{cases} x = & k(3pq + 2q^2) = -kq(3p + 2q) \\ y = & k(3pq + 2p^2) = \quad kp(2p + 3q) \\ z = & k(2pq + 3q^2) = \quad kq(2p + 3q) \end{cases}$$

[1] Presentata nella seduta del 4 giugno 1920.

[2] Ges. Werke, Bd. I, pag. 360.

[3] Questi Rendiconti, pag. 408.

dove p e q sono interi arbitrari, positivi, negativi o nulli (proporzionali alle y e z di poc'anzi), e k è un fattore di proporzionalità, suscettibile eventualmente anche di taluni valori fratti.

Ponendo $2p + 3q = r$ (numero che sarà certo intero, ogni qualvolta siano tali p e q), si ricava

$$p = \frac{r - 3q}{2}\,, \quad 3p + 2q = \frac{3r - 5q}{2}\,;$$

e per conseguenza

$$x = \frac{k}{2}(5q^2 - 3rq) \qquad y = \frac{k}{2}(r^2 - 3rq) \qquad z = krq\,.$$

Scrivendo pertanto $2k$ in luogo di k, e p in luogo di r, si hanno le soluzioni richieste sotto la forma

$$(4)_{\cdot} \qquad x = k(5q^2 - 3pq) \qquad y = k(p^2 - 3pq) \qquad z = k\,.\,2pq$$

dove ancora p e q sono interi, non entrambi nulli; e k (quando le espressioni per cui è moltiplicato risultano numeri non primi fra loro) può ricevere anche convenienti valori fratti [1].

Poichè i fasci di curve ellittiche irriducibili della superficie F^4, quali a noi occorrono, corrispondono a valori di x, y, z primi fra loro possiamo limitarci a tener conto delle coppie p, q anche primi fra loro. In tale ipotesi:

1) Se p e q sono entrambi dispari, le tre espressioni $5q^2 - 3pq$, $p^2 - 3pq$ e $2pq$ sono numeri tutti pari (e l'ultimo *non* divisibile per 4). Esse non ammettono invece il 2 come divisore comune, se dei due numeri p e q uno è pari e l'altro dispari; mentre il caso di p e q entrambi pari rimane escluso, essendosi supposti p e q primi fra loro.

2) Il prodotto $2pq$ ammette, all'infuori del 2, i soli fattori primi di p e q, tutti distinti gli uni dagli altri. Ora, i fattori di q non divideranno certo $p^2 - 3pq$; e, tra i fattori primi di p, il solo che possa dividere anche $5q^2 - 3pq$, e che dividerebbe in tal caso tutte e tre le espressioni moltiplicatrici di k nelle (4), è il 5; ben inteso, quando esso sia effettivamente un divisore di p.

[1] Le formole (4), per quanto appariscano meno simmetriche delle (3), si prestano meglio allo studio delle trasformazioni birazionali sopra F^4, poichè i fasci di cubiche $|\gamma_1|$ e $|\gamma_2|$ si hanno rispett. per $p = 0$, $q = 1$, $k = \frac{1}{5}$; e $p = 1$, $q = 0$, $k = 1$. Allo scambio di x e y (rimanendo invariato z) corrisponde la sostituzione a p, q, k, rispett., di $5q, p, \frac{k}{5}$.

Concludendo: Per avere i fasci di curve ellittiche irriducibili della superficie F^4, è sufficiente dare nelle (4) a p e q valori interi primi fra loro; e a k

il valore $\frac{1}{2}$, se p e q sono entrambi dispari, e p non multiplo di 5;
" $\frac{1}{5}$, se p è multiplo di 5, e p e q non entrambi dispari;
" $\frac{1}{10}$, se p, q sono entrambi dispari, e p multiplo di 5;
" 1 in tutti gli altri casi.

Si potrà inoltre supporre positivo uno determinato dei numeri p e q, poichè x, y, z rimangono inalterati se p e q si cambiano di (solo) segno entrambi. Per $p = 0$, e quindi $q = 1$ (se deve essere primo con p), oppure $q = 0$, $p = 1$, si hanno rispett. i due fasci di cubiche $|\gamma_1|$ e $|\gamma_2|$.

5. Affinchè la curva ellittica $x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\mathrm{C}$ di cui alla Nota prec., e dove x, y, z hanno valori dati dalle (4), sia effettiva e irriducibile, i parametri p e q devono ancora soddisfare a ulteriori condizioni. Ci limitiamo a stabilirle nell'ipotesi di p e q entrambi positivi, perchè già si è detto potersi così supporre per uno fra essi, mentre l'altro, come vedremo, può rendersi tale applicando l'involuzione I.

I tre moltiplicatori di k nelle (4), cioè i coefficienti dell'espressione

$$(5) \qquad (5q^2 - 3pq)\,\gamma_1 + (p^2 - 3pq)\,\gamma_2 + 2pq\,.\,\mathrm{C}\,,$$

dovendo annullare la forma f, a coefficienti tutti positivi, non potranno essere tutti e tre del medesimo segno. D'altra parte il terzo, $2pq$, essendosi supposti p e q positivi, è certo positivo. E i primi due, se la curva in parola è irriducibile, non possono essere entrambi negativi. Invero, la somma dei tre coefficienti vale $(p-2q)^2 + q^2$, ed è perciò positiva; per conseguenza, indicati i coefficienti stessi rispett. con $-a_1$, $-a_2$ (negativi) e a_3 (positivo), sarebbe $a_3 > a_1 + a_2$, e la (5) potrebbe scriversi

$$a_1(\mathrm{C} - \gamma_1) + a_2(\mathrm{C} - \gamma_2) + (a_3 - a_1 - a_2\,(\mathrm{C} \equiv a_1\,r_1 + a_2\,r_2 + (a_3 - a_1 - a_2)\mathrm{C}$$

con coefficienti tutti positivi; con che è manifesto trattarsi di un sistema riducibile, contenente un multiplo delle sezioni piane, e solo virtualmente di grado zero. Il risultato permane anche se a_1 od a_2 fosse nullo.

Per una curva irriducibile, fra i tre coefficienti della (5), ve ne sarà dunque sempre uno, e uno solo, negativo; e questo sarà uno fra i primi due. Quest'uno sarà inoltre, in valor assoluto, maggiore del terzo; poichè, se fosse negativo ad es. il primo, indicati i coefficienti con $-a_1$ (negativo), a_2, a_3 (positivi, e a_2 eventualmente anche nullo), nell'ipotesi $a_3 \geqq a_1$, la (5) potrebbe scriversi

$$a_1(\mathrm{C} - \gamma_1) + a_2\gamma_2 + (a_3 - a_1)\,\mathrm{C} \equiv a_1\,r_1 + a_2\,\gamma_2 + (a_3 - a_1)\,\mathrm{C}$$

e si avrebbe di nuovo un sistema riducibile.

Se il primo coefficiente della (5) (cioè $5q^2 - 3pq$) è negativo, e superiore in valore assoluto al terzo, si avrà $3pq - 5q^2 > 2pq$; e perciò, essendo q positivo, $p > 5q$. Se invece le stesse condizioni sussistono pel secondo coefficiente, sarà $3pq - p^2 > 2pq$, ossia $p < q$.

Affinchè dunque la (5) (con opportuno coefficiente k) *sia una curva ellittica effettiva e irriducibile, dovrà essere verificata, per p e q positivi, una delle due diseguaglianze*

$$p > 5q \quad \text{oppure} \quad p < q.$$

6. Le trasformazioni I, Γ_1, Γ_2 costruite al n. 2 della Nota prec., mutando la forma f in se stessa, e perciò ogni soluzione intera dell'equazione $f = 0$ in altra consimile, si rispecchiano in trasformazioni dei parametri p, q, che è facile assegnare.

Per l'involuzione I, ci riferiamo alle formole ($2a$) del num. cit., ponendo in esse, in luogo di x, y, z, i valori dati dalle (4). Si ha così

$$x' = k(5q^2 + 3pq) \qquad y' = k(p^2 + 3pq) \qquad z' = -k.2pq,$$

espressioni che differiscono dalle (4) solo per il cambiamento di segno di uno (arbitrario) dei parametri p, q (e supporremo sia q, ritenendo invece sempre $p \geq 0$). *L'involuzione* I *muta pertanto il parametro* q *in* $-q$ (lasciando invariato p).

Similmente, dalle formole ($2b$), colla stessa sostituzione, ed eseguendo alcune riduzioni, si ricava

$$x' = k\{5(q+2p)^2 \quad 3p(q+2p)\} \qquad y' = k\{p^2 - 3p(q+2p)\}$$
$$z' = k.2p(q+2p).$$

La trasformazione Γ_1 *muta il parametro* q *in* $q + 2p$ (lasciando anch'essa p invariato) [1].

Infine le formole ($2c$) dànno

$$x' = k\{5q^2 - 3(p+10q)q\} \qquad y' = k\{(p+10q)^2 - 3(p+10q)q\}$$
$$z' = k.2(p+10q)q;$$

vale a dire: *La trasformazione* Γ_2 *muta* p *in* $p + 10q$, lasciando invece invariato q.

Le operazioni I, Γ_1, Γ_2 operano dunque sui parametri p e q mediante le sostituzioni lineari:

$$\mathrm{I}\begin{cases} p' = p \\ q' = -q \end{cases} \qquad \Gamma_1\begin{cases} p' = p \\ q' = 2p + q \end{cases} \qquad \Gamma_2\begin{cases} p' = p + 10q \\ q' = q \end{cases}$$

(1) In particolare, dalla coppia $p = 1$, $q = 0$, corrispondente (per $k = 1$) al fascio di cubiche $|\gamma_2|$, si passa a $p = 1$, $q = 2$, onde $x = 14$, $y = -5$, $z = 4$, come è appunto nella formola che esprime γ'_2 nella sostituzione ($2b$).

il che, d'altronde, è inerente al fatto che il rapporto $\frac{p}{q}$ può considerarsi come coordinata proiettiva sulla conica $f=0$. Sopra questa conica, la **I** determina l'involuzione avente gli elementi doppî $p=0$, $q=1$ e $p=1$, $q=0$ (cioè i fasci $|\gamma_1|$ e $|\gamma_2|$), mentre Γ_1 e Γ_2 determinano proiettività paraboliche cogli stessi due elementi, rispett., come doppî ([1]).

7. Consideriamo ora sulla superficie F^4 un qualsiasi fascio di curve ellittiche effettive, irriducibili, le quali corrisponderanno al tipo (5), con un eventuale coefficiente k, e per certi valori interi di p e q, primi fra loro, il primo dei quali può supporsi positivo.

Se q è negativo, si applichi a tale fascio l'involuzione **I**; il fascio trasformato corrisponderà al medesimo valore di p, e al valore eguale ed opposto al precedente, perciò positivo, di q. Si indichi con $|\delta|$ questo nuovo fascio, e eventualmente lo stesso fascio precedente, se il primitivo q era già positivo. Per tale fascio $|\delta|$ sarà $p > 5q$, oppure $p < q$.

Nella prima ipotesi, si applichi a $|\delta|$ l'operazione Γ_2^{-1} (inversa di Γ_2), eventualmente più volte di seguito, finchè, per la prima volta, la p corrispondente al nuovo fascio (la quale p percorrerà la progressione aritmetica $p-10q$, $p-20q$, ...) risulti inferiore o eventualmente anche eguale a $5q$ (avvertendo che la q rimarrà frattanto invariata). Per questo nuovo fascio, la p sarà certo compresa fra $+5q$ e $-5q$, incluso il primo limite, potendo tuttavia essere positiva, negativa, o nulla; però quest'ultimo caso si presenterà solo se inizialmente $q=1$ (se no i primitivi p e q non sarebbero stati primi fra loro). Se detta p è negativa, si applichi ancora, a seguito, l'involuzione **I**, rendendo per tal modo positiva la p. *Essendo pertanto ora la p positiva e $\leq 5q$, essa dovrà anche risultare necessariamente* $< q$ (ultimo enunciato del n. 5).

A quest'ultimo fascio (se la sua p non è nulla), e così anche al fascio $|\delta|$ di cui sopra, se per esso, anzichè $p > 5q$, è $p < q$, si applichi l'operazione

(1) Le trasformazioni birazionali (non cicliche) del tipo di Γ_1 e Γ_2, aventi per traiettorie le curve ellittiche di un fascio $|\gamma|$, e costruite col procedimento Enriques applicato al n. 2, *b*) della Nota prec., non possono lasciare invariato, sulla superficie di cui trattasi, *nessun* altro sistema lineare di curve; perchè se no, sopra le γ, i gruppi di punti segnati da queste ultime curve verrebbero trasformati in gruppi equivalenti; e allora anche i gruppi di punti che, per ipotesi, si erano supposti avere i rispettivi multipli tutti incongrui (al n. 2 cit. erano $A+B+C$ ed M) più non sarebbero tali. Si tratta dunque di operazioni che, nel campo ternario, non possono lasciare invariato nessun punto ulteriore della conica $f=0$, all'infuori di quello che è immagine del fascio $|\gamma|$; perchè, se un altro punto unito vi fosse sopra $f=0$, esso sarebbe anche razionale, e perciò immagine di un sistema lineare effettivo, di grado virtuale zero. Tali operazioni determinano perciò *necessariamente*, sopra $f=0$, sostituzioni paraboliche; e i gruppi che le contengono sono, per conseguenza, « commensurabili » col gruppo modulare [Klein-Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, Bd. 1 (Leipzig 1897), pag. 518].

Γ_1^{-1} (inversa di I_1), eventualmente più volte, finchè la q corrispondente al nuovo fascio, percorrendo la successione $q - 2p, q - 4p, \ldots$, risulti per la prima volta $\leq p$ (mentre p stessa rimane invariata). L'ultima q sarà pertanto compresa fra $+p$ e $-p$; e se è negativa, la si renderà positiva applicando ancora, a seguito, l'involuzione I. Dopo di ciò la q sarà positiva (o nulla) e $\leq p$; sarà perciò di nuovo $p > 5q$. E allora, se l'ultima q non è nulla, si riprenderà da capo il procedimento.

Poichè i numeri p e q vanno, alternativamente e gradatamente, diminuendo di valore assoluto, il procedimento avrà certo termine; e terminerà quando uno di essi sarà ridotto a zero. Allora l'altro risulterà certamente eguale all'unità (se no i primitivi p e q avrebbero avuto massimo comun divisore > 1); e il fascio corrispondente sarà $|\gamma_1|$ oppure $|\gamma_2|$.

Concludiamo: *Qualunque fascio di curve ellittiche, effettive e irriducibili, esistente sopra la superficie* F^4, *si può ricavare da uno dei fasci di cubiche* $|\gamma_1|$ *e* $|\gamma_2|$ *con un prodotto di trasformazioni* $\mathrm{I}, \Gamma_1, \Gamma_2$.

8. Riesce ora facile un ultimo passo, per accertare che il gruppo complessivo delle trasformazioni birazionali di F^4 si può generare colle sole tre operazioni sopra menzionate.

Infatti, una qualsiasi trasformazione birazionale S della superficie F^4 muterà il fascio di cubiche $|\gamma_1|$ in un certo fascio di curve ellittiche, effettive e irriducili, $|\delta|$. Applicando a $|\delta|$ una conveniente successione Π di operazioni I, Γ_1 e Γ_2 (in conformità del num. prec.), trasformeremo $|\delta|$ stesso di nuovo in uno dei fasci di cubiche $|\gamma_1|$ e $|\gamma_2|$; e supponiamo di averlo trasformato in γ_1 (vedremo anzi tosto che deve essere così). Il prodotto $\mathrm{S}.\Pi$ sarà pertanto una trasformazione che lascia fermo il fascio $|\gamma_1|$; esso dovrà quindi mutare le γ_2 in curve del tipo (5), con un eventuale coefficiente k, le quali, al pari delle γ_2, incontrino le γ_1 in 2 punti; ciò che si esprime colla relazione:

$$k\{(5q^2 - 3pq)\cdot 0 + (p^2 - 3pq)\cdot 2 + 2pq \cdot 3\} = 2$$

ossia $kp^2 = 1$, soddisfatta solo per $k = p = 1$. Ora alle coppie $(1, q)$ corrispondono, per q pari (positivo o negativo), i fasci ottenuti da $|\gamma_2|$ applicando $q{:}2$ volte l'operazione Γ_1; mentre per $q = 1$, e conseguentemente per ogni valore dispari di q, si hanno sistemi riducibili ($|\gamma_1 - \gamma_2 + C| \equiv |\gamma_1 + r_2|$, e suoi trasformati). Applicando dunque ancora una conveniente potenza (negativa o positiva) di Γ_1, giungeremo a una trasformazione che lascerà fermi entrambi i fasci di cubiche $|\gamma_1|$ e $|\gamma_2|$; e questa, per quanto è detto al n. 2, a) della Nota prec., non può essere che la I, oppure la identità [1].

[1] In altri termini, quest'ultimo ragionamento prova che ogni trasformazione birazionale di F^4, la quale lasci invariato il fascio di cubiche $|\gamma_1|$, è un prodotto di operazioni I e Γ_1; più particolarmente una potenza di Γ_1, o il prodotto di una tale potenza per I, secondo che sulle γ_1 essa subordina una trasformazione di 2ª o di 1ª specie.

Non è possibile invece che dal fascio $|\delta|$, trasformato di $|\gamma_1|$ mediante la S, nasca, con un prodotto di operazioni I, Γ_1 e Γ_2, il fascio $|\gamma_2|$, anzichè di nuovo $|\gamma_1|$; perchè, in modo del tutto analogo, si giungerebbe allora ad una trasformazione birazionale di F^4 la quale, anzichè lasciare invariato ciascuno dei fasci $|\gamma_1|$ e $|\gamma_2|$, li scambierebbe tra loro; e questo sappiamo che non è possibile ([1]).

Pertanto: *Il gruppo (infinito, discontinuo)* ([2]) *di tutte le trasformazioni birazionali della superficie* F^4 *è generato dalle tre operazioni* I, Γ_1 *e* Γ_2.

È ovvio che, come operazioni generatrici di tale gruppo, si possono prendere anche le *tre involuzioni* I, $I \cdot \Gamma_1$ e $I \cdot \Gamma_2$; queste ultime due, come venne incidentalmente osservato al n. 2, *b*) della Nota prec., consistono nella proiezione doppia di ogni cubica γ_1 o rispett. γ_2 dal punto tangenziale di quello in cui essa si appoggia ad r_2, o rispett. ad r_1.

Il gruppo anzidetto si rispecchia in un gruppo oloedricamente isomorfo di sostituzioni lineari intere, di modulo ± 1, della forma $f \equiv 4z^2 + 4xy + 6xz + 6yz$, generato dalle sostituzioni (2*a*), (2*b*) e (2*c*) della Nota prec. Quest'ultimo gruppo non è però il gruppo totale di trasformazioni lineari intere della forma f; e nella Nota prec. vennero appunto indicati due tipi di sostituzioni lineari contenute nel gruppo totale della forma f, e che non sono immagini di trasformazioni birazionali sopra F^4.

([1]) In luogo della relazione $kp^2 = 1$ si troverebbe, nel caso attuale, $5kq^2 = 1$, che ammette l'unica soluzione $k = 1/5$, $q = 1$. Alla coppia $(p, 1)$ corrispondono, se p è multiplo di 10, il fascio $|\gamma_1|$ $(p = 0)$ e i suoi trasformati mediante potenze di Γ_2; e, negli altri casi, sistemi riducibili. Basta infatti verificarlo per p compreso fra -5 e $+5$; perciò anche solo per $0 < p \leq 5$; e in questi casi, essendo $q = 1$, non è nè $p < q$, nè $p > 5q$.

([2]) E anzi *impropriamente discontinuo*, perchè in un intorno comunque piccolo di un punto generico di F^4 (e più particolarmente sulle stesse curve γ_1 e γ_2 passanti per tale punto) esistono punti distinti dal primo e ad esso equivalenti.