ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° febbraio 1920.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Invarianti affini-differenziali di una superficie.* Nota del Corrispondente Guido Fubini.

Da una recente Memoria di R. Weitzenböck [1], *Zur projektiven Differentialgeom. analytischer Flächen*, apprendo che in Memorie dei signori Pick, Blaschke, Radon, pubblicate nei Leipziger Berichte (1917-18), non giunti ancora a Torino, è studiata la teoria degli invarianti differenziali di una superficie rispetto al gruppo delle trasformazioni affini, che conservano i volumi. Ora, tanto tale studio, quanto quello relativo al gruppo affine più generale, si compiono nel modo più completo non solo per le superficie, ma anche per le ipersuperficie, partendo dai principî svolti nei miei lavori citati a pie' di pagina. Io non voglio pubblicare qui dei risultati prima di aver potuto consultare tali Memorie: voglio soltanto esporre il metodo, illustrandolo con l'esempio delle superficie. Nei miei lavori si dimostra che

[1] Sitzungsber. der Akad. der Wissenschaften in Wien (Abt. II*a*, Bd. 127, Heft 8, 1918). Da questa Mem. appare che l'A. non conosce i miei recenti lavori pubblicati in questi Rendiconti e in quelli del Circ. Matem. di Palermo, ciò che è ben naturale, data l'interruzione degli scambî internazionali; mi sembra però anche che gli siano sfuggite le più antiche ricerche di Darboux e Segre, e gli studî fatti dal Wulczynski in coordinate curvilinee qualsiansi. Tale Mem. non risolve però il problema di caratterizzare completamente una superficie nel gruppo proiettivo. Cfr., per l'elenco completo dei miei lavori su tale argomento, la mia Mem. *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale*, nei Rend. del Circ. Matem. di Palermo (tomo 43).

ogni superficie od ipersuperficie si caratterizza nel gruppo proiettivo con due o tre forme differenziali del primo ordine (una o due quadratiche ed una cubica); date le quali, si ottiene la superficie od ipersuperficie, integrando un sistema di equazioni ai differenziali totali, a cui soddisfano le coordinate omogenee di un punto della ipersuperficie. I coefficienti di tali equazioni differenziali *lineari* sono completamente determinati dai coefficienti di tali forme differenziali. Nelle mie Mem. cit. si studia come generalmente si possa togliere l'indeterminazione dovuta al fattore arbitrario, per cui si possono moltiplicare le coordinate omogenee di punto; ma per lo studio degli invarianti di una superficie nel gruppo affine, tale indeterminazione si deve naturalmente togliere in altro modo. Poichè in tale studio sono elemento essenziale le coordinate *non omogenee*, noi potremo ricorrere a *coordinate omogenee, una delle quali sia uguale ad* 1. Due ipersuperficie saranno affini soltanto quando coincideranno le corrispondenti equazioni differenziali.

Così, p. es., per una superficie riferita alle assintotiche, le forme

$$(1)\quad 2\beta\gamma\, du\, dv \qquad\qquad (2)\quad 2\beta\gamma\,(\beta du^3 + \gamma dv^3)$$

sono invarianti per deformazioni proiettive, e costituiscono quello che io perciò chiamo l'elemento lineare proiettivo, invariante in particolare per collineazioni: esse, uguagliate a zero, definiscono le assintotiche e le linee di Darboux-Segre. Le equazioni differenziali corrispondenti sono:

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \alpha\frac{\partial x}{\partial u} + \beta\frac{\partial x}{\partial v}\quad ; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \gamma\frac{\partial x}{\partial u} + \varepsilon\frac{\partial x}{\partial v},$$

ove α, ε dipendono dalla terza forma (quadratica), che qui non è necessario ricordare, e soddisfano, per le condizioni di integrabilità, alla $\alpha'_v = \varepsilon'_u$, cosicchè

$$(4)\qquad d\psi = 2(\alpha\, du + \varepsilon\, dv)$$

è un differenziale esatto. Esso non è però *intrinseco*, perchè cambia di significato quando si cambiano i parametri delle assintotiche, cioè quando si muti u in una funzione U della u, e v in una funzione V della v; è facile invece verificare, e noi controlleremo, che

$$(5)\qquad d\varphi = 2(\alpha\, du + \varepsilon\, dv) - 2d\log\beta\gamma$$

(pure essendo ancora esatto) ha significato *intrinseco*.

Dunque nella geometria, rispetto al gruppo affine, alla terza forma si può sostituire la forma *lineare* (5), che è un differenziale *esatto*! *Due superficie saranno affini soltanto quando abbiano uguale elemento lineare proiettivo, e abbiano uguale forma* $d\varphi$. Cerchiamo il significato geometrico della φ.

Se $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ è l'elemento lineare di Gauss, ed $\left\{ {ih \atop l} \right\}$ ne sono i simboli di Christoffel, è

$$\alpha = \left\{ {11 \atop 1} \right\}, \quad \beta = \left\{ {11 \atop 2} \right\}, \quad \gamma = \left\{ {22 \atop 1} \right\}, \quad \varepsilon = \left\{ {22 \atop 2} \right\}.$$

Le equazioni di Gauss-Codazzi si possono scrivere nella forma

$$\frac{\partial \log D' \sqrt{EG - F^2}}{\partial u} = 2\alpha, \quad \frac{\partial \log D' \sqrt{EG - F^2}}{\partial v} = 2\varepsilon, \quad \frac{D'^2}{EG - F^2} = -K,$$

ove K è la curvatura totale e $2D'\,du\,dv$ è la seconda forma di Gauss.

Detti ϱ_1 e ϱ_2 i raggi di curvatura ordinaria (o geodetica) delle assintotiche, si ha

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{EG - F^2}{(EG)^{3/2}} \beta\gamma$$

donde:

$$\left(\frac{1}{\beta\gamma}\right)^2 = \frac{(EG - F^2)^2}{(EG)^3} (\varrho_1 \varrho_2)^2 = \frac{1}{EG} (\varrho_1 \varrho_2)^2 \operatorname{sen}^4 \omega,$$

e quindi:

$$d\varphi = d \log \frac{D'(EG - F^2)^{5/2}}{(EG)^3} (\varrho_1 \varrho_2)^2 = d \log [\sqrt{-K} \operatorname{sen}^6 \omega \, (\varrho_1 \varrho_2)^2] \ (^1)$$

ove ω è l'angolo delle due assintotiche. Questo valore di $d\varphi$ è scritto così in forma tale, che è facilissimo esplicitarlo in coordinate curvilinee *qualsiasi*; cosicchè il nostro studio vale senz'altro, *qualunque sia il sistema di linee coordinato*.

Affinchè poi il gruppo affine, che trasforma l'una nell'altra le due superficie, conservi i volumi, sarà ancora necessario e sufficiente che D' abbia ugual valore in punti omologhi delle due superficie: ossia, in forma intrinseca, che $\frac{D'}{\beta\gamma}$ sia uguale in tali punti omologhi. Si noti che

$$\frac{D'}{\beta\gamma} = \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\sqrt{EG - F^2}^3}{\sqrt{EG}^3} \varrho_1 \varrho_2 = \sqrt{-K} \, \varrho_1 \varrho_2 \operatorname{sen}^3 \omega.$$

(1) Ne segue che il rapporto R dei valori di $\sqrt{-K}(\varrho_1 \varrho_2)^2 \operatorname{sen}^6 \omega$ in due punti di una superficie si conserva per trasformazioni affini; e che *tutti* gli invarianti per affinità si riducono all'elemento lineare proiettivo, e a questo rapporto R.