ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Fisica. — *Sulla gravitazione.* Nota VII del Corrispondente Q. MAJORANA.

Risultati delle osservazioni. — Descritti nella precedente Nota la disposizione da me adottata per le presenti ricerche ed il metodo scelto per le singole osservazioni, non è mia intenzione di riportare tutte queste, anche perchè esse ammontano a cinque o sei migliaja di letture di oscillazioni. Dirò pertanto che lo scopo di un numero tanto elevato non è stato quello di ottenere una media estremamente precisa delle varie osservazioni, ma sibbene l'altro di perfezionare continuamente la disposizione ed il metodo stesso. Ho esposto infatti i più importanti artificî adottati per eliminare o controllare le varie cause di errore; di altri dirò in fine di questa esposizione, e di altri, meno importanti, tacerò per brevità. Ma tutti, nel loro insieme, furono escogitati poco per volta e man mano che, in più di un anno di continuo lavoro sperimentale, andavo rintracciando quelle cause di errore. Così, mentre nel marzo 1919 mi era sembrato di poter concludere per la esistenza del fenomeno di un dato segno, mi accorsi poi di taluni difetti; dopo averli eliminati, potei verificare il fenomeno previsto, tanto per il suo segno quanto, all'incirca, per la sua misura. Per cui le osservazioni, se sono state sempre a me utili, non servono tutte a fissare ora i risultati che mi sembrano definitivi.

Le misure che ora riporterò sono le ultime da me eseguite, e cioè quelle dei giorni 20 e 21 luglio 1919, nei quali giorni vi fu in Torino sciopero generale; e potevo quindi usufruire di un periodo di quiete meccanica quasi assoluta, se tuttavia si eccettua il passaggio di qualche raro camion militare. Tali misure sono state eseguite dopo che io ebbi raggiunto la massima perfezione nel funzionamento del mio apparecchio, e furono precedute da osservazioni preliminari, che non riporto, fatte nei giorni e nelle notti immediatamente precedenti [1].

A titolo di esempio, trascrivo completamente le prime letture fatte la mattina del giorno 20 luglio. Le iniziali C, S, sono abbreviazioni di *con* o *senza* mercurio; ricordo inoltre che la scala, su cui batte il raggio riflesso da S, ha lo zero in alto: ciò vuol dire che un accrescimento nella cifra che indica la posizione di riposo della bilancia, corrisponde ad un abbassamento della sfera di piombo m, cioè ad un apparente suo aumento di peso.

[1] Come è noto, era stata stabilita con parecchi giorni di precedenza l'effettuazione del detto sciopero.

Osservazioni del 20 luglio 1919.

N. d'ord.	Ora	Natura delle osservazioni	Oscillazioni Alto	Oscillazioni Basso	Pos. riposo	Effetto
1.	8 52′ 0″	C	219,8 220,0	220,9	220,40	—
2.	8 58′ 40″	S	221,0 220,9	222,3	221,62	—
3.	9 5′ 20″	C	220,4 220,9	222,6	221,62	— 0,61
4.	9 12′ 0″	S	221,9 222,2	223,0	222,52	— 0,45

. . . . . .

. . . . . .

Ometto le altre osservazioni fatte nel corso della giornata del 20 VII e del successivo 21. Si vede che dalle prime tre serie di letture (1, 2, 3) si ha una prima determinazione dell'effetto: 0,61; da 2, 3, 4 se ne ha una seconda: 0,45; ecc. Il segno — preposto ad esse, sta ad indicare che la presenza del mercurio fa apparire la sfera di piombo più leggera. Nella tabella seguente riporto tutte le determinazioni dell'effetto, fatte nelle due giornate predette, nessuna esclusa; le linee di separazione indicano il termine di una serie di misure:

20 luglio	— 0,31	— 0,37	— 0,32	— 0,36
— 0,61	— 0,46	— 0,29	— 0,38	— 0,31
— 0,45	———	— 0,25	— 0,28	— 0,20
— 0,40	— 0,23	— 0,23	— 0,38	— 0,22
— 0,44	— 0,38	— 0,30	— 0,19	— 0,39
— 0,52	— 0,67	— 0,27	— 0,25	— 0,35
— 0,46	———	— 0,18	— 0,35	— 0,42
— 0,42	— 0,42	— 0,20	— 0,32	— 0,50
— 0,39	— 0,39	———	— 0,36	— 0,35
— 0,50	— 0,06	21 luglio	———	— 0,30
— 0,39	— 0,23	— 0,84	— 0,40	— 0,30
— 0,30	— 0 30	— 0,31	———	— 0,28
— 0,22	— 0,38	— 0,64	— 0,40	———

La media di queste 57 osservazioni è

$$-\text{mm. } 0{,}358 \pm 0{,}012,$$

dove l'errore probabile 0,012 è stato calcolato coi minimi quadrati. Si vede dunque come costantemente tutte le fatte osservazioni, nessuna esclusa, in-

dichino diminuzione di peso della sfera di piombo, per la presenza del mercurio.

Per meglio rendermi conto della fatta determinazione, costruisco i diagrammi della fig. 5. Come ascisse sono riportati i progressivi intervalli di tempo eguali: $C_1 S_2$, $S_2 C_3$, $C_3 S_4$, $S_4 C_5$, ..., che intercedono fra le successive determinazioni delle posizioni di riposo della bilancia; come ordinate, i valori di tali determinazioni. Per evitare confusione, ciascuna serie è spo-

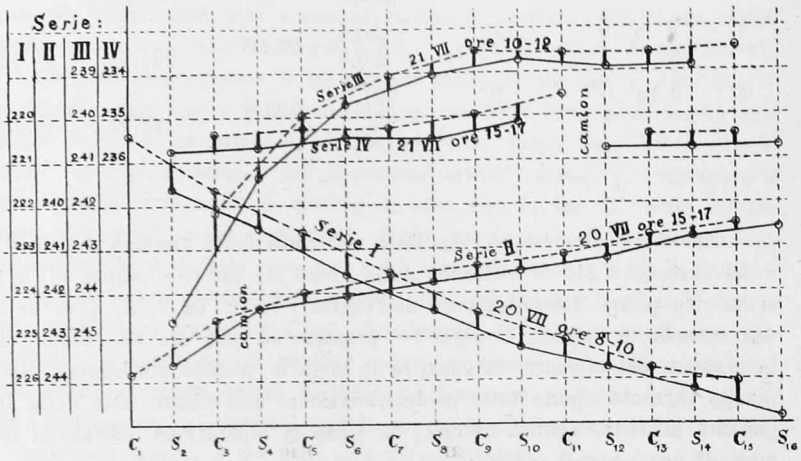

Fig. 5

stata sulle proprie ordinate. Per ciascuna serie si hanno due spezzate: quella a tratto continuo si riferisce alle osservazioni *senza* mercurio, e quella tratteggiata a quelle *con* mercurio. Si vede che le due spezzate, corrispondenti a ciascuna serie, hanno andamenti irregolari ma all'incirca paralleli, talchè la spezzata *senza* mercurio è sempre al disopra della spezzata *con* mercurio. Quell'andamento irregolare dipende, come già si disse, dalle perturbazioni termometriche sulla bilancia. Le medie numeriche (salvo cinque) scritte nella precedente tabella, corrispondono ai tratti verticali segnati nella fig. 5, fra le due spezzate di ciascuna serie di osservazioni; le cinque medie mancanti sono state omesse per semplicità di disegno, e non perchè discordanti.

Dalle serie II e IV osservate, rispettivamente, nei pomeriggi dei giorni 20 e 21 luglio, si rileva l'effetto del passaggio di due camions; in particolare per la IV, le due spezzate subirono un salto brusco, tale da far perdere due medie.

Prima, fra e dopo le serie di osservazioni, le di cui medie sono s ate riportate, ho eseguito determinazioni della sensibilità della bilancia, i cui

risultati non trascrivo, per brevità, integralmente: la loro media è di 171 mm. per mg. Per cui, al constatato spostamento medio della posizione di equilibrio della bilancia, sotto l'influenza della presenza del mercurio, corrisponde una apparente diminuzione di peso della sfera di piombo di

$$\text{mg.}\ \frac{0{,}358 \pm 0{,}012}{171} = \text{mg. } 0{,}00209 \pm 0{,}00007\,;$$

dico *apparente*, perchè occorre tener conto di parecchie cause di errore, come ora farò vedere.

Ricerca delle cause di errore. — In una ricerca come la presente, che porta cioè alla constatazione di un fenomeno di estrema piccolezza, le cause che possono indurre in errore possono essere, necessariamente, molte. Di parecchie di esse si è già avuto occasione di dire; e propriamente di quelle che, con opportuni accorgimenti sperimentali, da me già indicati, potevano essere eliminate. Ma altre ne permangono, che, se non tenute presenti, possono falsare il risultato numerico ottenuto. Onde è che occorre studiarle con precisione, affinchè questo venga esattamente corretto. Altre cause possono sospettarsi, che peraltro, esaminate attentamente, non possono alterare sensibilmente il risultato ottenuto. Delle une e delle altre dirò ora rapidamente.

Dissimetria di masse. — Malgrado tutte le cautele adottate, può avvenire che la sfera di piombo sia soggetta ad un'azione newtoniana, non esattamente equilibrata, da parte del mercurio circostante. Si è detto che ragioni costruttive mi fanno ritenere che, nell'aggiustaggio delle varie parti dell'apparecchio, non vi sieno errori lineari superiori a circa 2/10 di mm.; ma occorre rendersi conto dell'influenza di questi errori, se mai essi esistessero realmente. Al riguardo, suppongo anzitutto esattamente di forma sferica ed omogenea la massa di piombo m, pesante 1274 gr.; esattamente sferico l'involucro V; ed esattamente cilindrico e verticale il vaso di legno U. Queste ipotesi sono lecite, giacchè, se anche esse non rispondessero al vero, l'aggiustaggio reciproco di tali parti insieme, può causare errori più gravi. Di questa possibilità occorre dunque discorrere prima; e se tali eventuali errori fossero riconosciuti trascurabili, a maggior ragione lo sarebbero quelli provenienti dalle imperfezioni costruttive dei varii pezzi.

Ora, considerando i centri di figura C_1, C_2, C_3, rispettivamente della sfera di piombo m, dell'involucro V, del cilindro U, occorrerebbe, per l'assoluta simmetria, che tali punti fossero coincidenti. Ma potrà avvenire, per errore, che:

1) C_1 e C_2 sieno spostati sulla stessa verticale;
2) C_1 e C_3 » » » » »
3) C_1 e C_2 » » su di un piano orizzontale;
4) C_1 e C_3 » » » » »

Per quanto riguarda gli errori 3 e 4, si comprende subito che essi non debbono preoccupare. Infatti, se mai, la massa di mercurio eserciterebbe un'azione sulla sfera di piombo pochissimo diversa da zero, ma orizzontale; per cui la componente di questa, secondo la verticale e quindi sul coltello di destra della bilancia, sarebbe esattamente nulla, salvo errori di ordine assolutamente inferiore, dovuti allo spostamento laterale, per tale forza, della sfera di piombo, che è inutile di calcolare.

Per quanto concerne l'errore 1, faccio le seguenti considerazioni: Sia P (fig. 6) il centro di m, nel quale si può considerare concentrata la massa

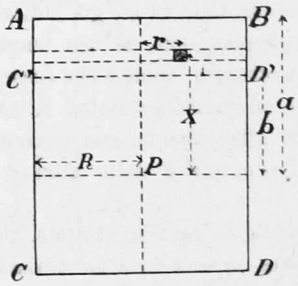

Fig 6.

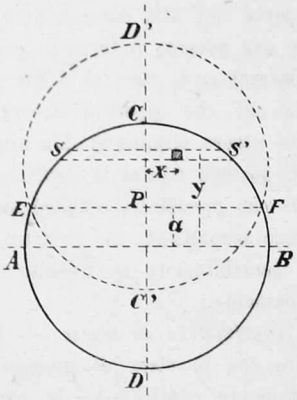

Fig. 7.

sferica di piombo. Indichino AB e CD le basi del cilindro di mercurio, ossia i livelli che vengono raggiunti nelle singole esperienze. Esse, per la ipotesi che ora faccio, non sieno esattamente simmetriche rispetto a P. Sia C′D′ parallela ad AB, e simmetrica di CD rispetto a P. Si tratta di determinare l'azione, su P, della massa cilindrica di diametro AB e di spessore AC′. Sia a la distanza di P dal piano AB, e b quella da C′D′. Considero uno strato infinitesimo del cilindro attraente, parallelo alle sue basi e di spessore dx, e distante x da P. Di questo strato, una corona circolare di raggio r ha su P un'azione attrattiva

$$df = 2\pi k m \vartheta x\, dx \frac{r\, dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}};$$

dove k è la costante di attrazione, m la massa di piombo, ϑ la densità del mercurio. L'azione di tutto lo strato di spessore dx, essendo R il raggio del cilindro, sarà

$$f = 2\pi k m \vartheta x\, dx \int_0^{R} \frac{r\, dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = 2\pi k m \vartheta \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) dx\,.$$

E l'azione di tutto il cilindro ABD'C' sarà data da

$$F = 2\pi k m \vartheta \int_b^a \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) dx =$$

$$= 2\pi k m \vartheta \left(a - b - \sqrt{a^2 + R^2} + \sqrt{b^2 + R^2}\right).$$

Nel mio apparecchio le dimensioni del cilindro compreso tra il livello inferiore ed il superiore sono: $R = 10{,}925$ cm.; $2a = 21{,}170$ cm. Vediamo ora quale sarebbe l'influenza della dissimetria, p. es., di 1 mm. fra i due livelli. Si avrà: $a = 10{,}585$ cm.; $b = 10{,}485$. Applicando la relazione trovata, nella quale si pone $k = 6{,}7 \cdot 10^{-8}$; $m = 1274$ gr; $\vartheta = 13{,}60$, si ha $F = 0{,}00021$ dine (ovvero, all'incirca, milligrammi).

Siccome l'errore di aggiustaggio dei livelli non può superare, per quanto si è detto, i 2/10 di mm., si può ritenere che le determinazioni fatte possano essere errate al più per un quinto del precedente valore, cioè di circa mg. 0,00004; e ciò per quanto riguarda l'errore 1.

Circa l'errore 2, sia il cerchio ACBD (fig. 7) la traccia dell'involucro V. Il centro della sfera m si trovi alquanto spostato, p. es., verso l'alto, in P. Conduco il cerchio ED'FC' simmetrico del primo rispetto alla corda EF. Supposto il resto del mercurio disposto simmetricamente a P, su questo punto agisce una forza dovuta alla massa dissimetrica del solido ottenuto per la rotazione della superficie ED'FC, intorno a CD'. Essa sarà diretta secondo DD', e risulterà uguale alla differenza delle forze che le calotte sferiche PED'F e PECF, supposte piene, eserciterebbero su P. Determino prima l'azione della calotta PECF; dico a la distanza fra P ed il centro di ACBD, e considero uno strato infinitesimo orizzontale SS', di spessore dx, distante y dal detto centro. Un elemento circolare di raggio x, di tale strato avrà un'azione su P data da

$$df = \frac{2\pi k m x\, dx\, dy\, \vartheta (y - a)}{[x^2 + (y - a)^2]^{3/2}},$$

dove, al solito, k è la costante di attrazione, m la massa concentrata in P, e ϑ la densità del mercurio. L'azione di tutto lo strato SS' sarà

$$f = 2\pi k m \vartheta (y - a)\, dy \int_0^{\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{x\, dx}{[x^2 + (y - a)^2]^{3/2}} =$$

$$= 2\pi k m \vartheta\, dy \left\{1 - \frac{y - a}{\sqrt{R^2 - 2ay + a^2}}\right\}.$$

L'azione F_1 di tutta la calotta sferica PECF si ottiene, integrando questa espressione fra a ed R:

$$F_1 = 2\pi k m \vartheta \left(\int_a^R dy - \int_a^R \frac{y-a}{\sqrt{R^2 - 2ay + a^2}} dy \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \pi k m \vartheta \frac{1}{a^2} \left\{ R^3 - a^3 - (R^2 - a^2)^{3/2} \right\}.$$

L'azione della calotta PED'F su P si otterrà ponendo $-a$ al posto di a, e quindi

$$F_2 = \frac{2}{3} \pi k m \vartheta \frac{1}{a^2} \left\{ R^3 + a^3 - (R^2 - a^2)^{3/2} \right\}.$$

E, finalmente, l'azione F cercata sarà la differenza fra queste azioni, e cioè

$$F = F_2 - F_1 = \frac{2}{3} \pi k m \vartheta a.$$

Questo risultato è, dal punto di vista analitico, interessante per la sua semplicità: esso è indipendente da R.

Suppongo ora, come per l'errore 1, che si abbia uno spostamento del centro della sfera, rispetto all'involucro, di 1 mm.; si ha $a = 0{,}1$ cm. Sarà quindi $F = 0{,}00024$ dine (o, all'incirca, mg.). Anche qui l'errore di 1 mm. è superiore al possibile, che al più è di circa 0,2 mm. Per cui si deve ritenere che, per quanto riguarda l'errore 2, la fatta determinazione possa essere errata, al più, per circa mg. 0,00005.

Complessivamente, è certo che gli errori di aggiustaggio dei livelli del mercurio e dell'involucro V non possono influire per un valore superiore a

$$\text{mg. } 0{,}00004 + 0{,}00005 = \text{mg. } 0{,}00009.$$

Il calcolo precedentemente eseguito permette anche di determinare l'azione attrattiva di metà della massa di mercurio sulla sfera di piombo. Ciò, come si ricorda, serve, in un metodo già indicato, per la determinazione della sensibilità della bilancia. Ora tale azione risulta eguale alla differenza tra l'azione del cilindro ABC'D' (fig. 6), per il quale si supponga $b = 0$, e quella di una calotta semisferica (di diametro uguale a quello dell'involucro V della fig. 4) sul suo centro. Quest'ultima si ottiene ponendo $a = 0$ nella espressione già trovata di F_2. Veramente, eseguendo tale sostituzione, si vede che questa quantità assume valore indeterminato; ma è facile riconoscere che il suo limite, per $a = 0$, è dato da $\pi k m \vartheta R$. Per cui, l'azione della metà del mercurio, ricercata, sarà

$$F_m = \pi k m \vartheta (2a + 2R - 2\sqrt{a^2 + R^2} - r);$$

e tale formula è stata utilizzata a suo tempo.

Spostamento dello zero. — Una causa di errore, che si può anche definire dissimetria di massa, è dovuta alla impossibilità di ottenere costantemente la perfetta centratura della sfera di piombo, rispetto all'involucro V, in conseguenza della variabilità della posizione di riposo della bilancia; l'errore è peraltro piccolissimo e si corregge facilmente.

Si osserva intanto che, se la sfera *m* fosse esattamente situata nel centro di gravità del mercurio asportabile, ciò corrisponderebbe, per gli aggiustaggi preventivi da me eseguiti, al fatto che l'indice H a lettura diretta della bilancia (fig. 4) sia sullo zero della rispettiva scala, e che l'indice luminoso riflesso dallo specchio S, sia sul punto di mezzo della scala verticale, lunga 500 mm., cioè a 250 mm. Ma, a causa della variabilità dello zero, si constata di solito uno spostamento, piuttosto piccolo, ma variabile da serie a serie di osservazioni; ciò, del resto, si rileva dai diagrammi della fig. 5. Per quanto riguarda tutte le osservazioni riportate, facendo la media tra le posizioni di riposo della bilancia nei due giorni 20 e 21 luglio, si ha la cifra 234,9. Per cui, si deve tener conto dello spostamento 250,0 — 234,9 = = mm. 15,1, cioè di un rialzo da determinare, della sfera di piombo, rispetto al centro di simmetria. Conoscendo la distanza della scala dalla bilancia (12 metri), e la lunghezza del braccio di questa (13 cm.), si trova che quel rialzo è, in media, di

$$\text{mm.}\ \frac{15{,}1 \cdot 130}{12000 \cdot 2} = \text{mm. } 0{,}08 .$$

Questo errore di aggiustaggio ha due effetti distinti. Considerando lo spostamento della sfera rispetto alle basi del cilindro di mercurio, esso fa nascere una forza verso il basso, dovuta all'attrazione di uno spessore di mercurio in più dalla parte bassa, *doppio* dello spostamento osservato; il valore di tale forza è, per quanto si è visto,

$$\text{mg. } 0{,}08 \cdot 2 \cdot 0{,}0002 = \text{mg. } 0{,}000032 .$$

D'altro canto, lo spostamento verso l'alto, rispetto all'involucro V, fa nascere una forza, diretta appunto verso l'alto, che è proporzionale allo spostamento stesso. Tale forza è

$$- \text{mg. } 0\ 00024 \cdot 0{,}58 = - \text{mg. } 0{,}000019 .$$

Per cui la forza complessiva, risultante dai due effetti riportati, è

$$\text{mg. } 0{,}000032 - 0{,}000019 = \text{mg. } 0{,}000013 .$$

Azione newtoniana del mercurio sulla tara e del suo serbatoio su entrambe le sfere di piombo. — Queste azioni sono inevitabili, in conseguenza della speciale conformazione dell'apparecchio; ma d'altronde se ne tiene facilmente conto. Consideriamo anzitutto il mercurio di massa M, che

si trova nel recipiente U. Si può, con sufficiente approssimazione, immaginare che tale massa sia concentrata nel suo centro di gravità, ai fini dello studio della sua azione sulle parti mobili della bilancia (da essa relativamente lontane) come la sfera m' che serve di tara, ed il giogo. La distanza tra quel centro di gravità ed il centro di m', risulta di $l = 98$ cm., se computata verticalmente; di $g = 26$ cm., se orizzontalmente (quest'ultima dimensione rappresenta la lunghezza del giogo). Lo sforzo verticale, agente sul coltello di destra, sarà la componente verticale dell'azione di M su m', ed è dato dalla espressione

$$f_1 = -\frac{k\,m\,\mathrm{M}\,l}{(l^2 + g^2)^{3/2}};$$

il segno — indica che questa forza è dello stesso segno dell'effetto cercato, e quindi va sottratto dal valore trovato per esso.

Essendo $k = 6{,}68 \cdot 10^{-8}$; $m =$ gr. 1274; $\mathrm{M} =$ gr. 104000, si ha

$$f_1 = -0{,}000832 \text{ dine} = -\text{mg. } 0{,}000848 .$$

In maniera analoga calcolo le azioni differenziali e verticali dei 6 serbatoi di mercurio posti a m. 2,30 dalla bilancia, quando quel liquido vi si trova, perchè rimosso dal recipiente V; tali azioni si svolgono su entrambe le due sfere di piombo. Per brevità riporto soltanto il loro valore complessivo

$$f_2 = +\text{ mg. } 0{,}000068 ,$$

che ha segno contrario a quello di f_1.

Il giogo ha una massa di circa 380 grammi. Esso subisce azioni attrattive d segno opposto, sulle sue due braccia; e ciò tanto se il mercurio si trovi nel recipiente V, quanto se si trovi nei serbatoi. Un esame sommario della disposizione, ed un calcolo grafico che non riporto, mi hanno fatto vedere che tale azione tenderebbe a mascherare il fenomeno, facendo apparire m alquanto pesante, quando il mercurio è in V; ma il valore di tale forza è trascurabile, essendo dell'ordine dei milionesimi di milligrammo.

Azione del galleggiante e del suo contrappeso. — Il galleggiante K (fig. 5) è una massa mobile che, insieme col suo contrappeso K', agisce sulla sfera m; la sua azione su m' è perfettamente trascurabile. Esso pesa gr. 300, ed il suo contrappeso 250. Togliendo dai 300 gr. la massa del mercurio spostato, che sarà evidentemente di 50 gr., restano due masse di 250 gr. ciascuna, che alternativamente si abbassano o si innalzano allo spostarsi del mercurio. Ora, per ragioni costruttive, queste masse non si muovono sulla stessa verticale, e quindi non è possibile che i loro effetti attrattivi su m si compensino in ogni istante; si ha perciò da fare sempre con una certa differenza di attrazione. Si rileva però che, in causa della sua

maggiore vicinanza ad m, la maggiore azione è dovuta al galleggiante; e dirò brevemente che il valore di quella differenza è di

$$f_3 = -\text{mg. } 0{,}000174.$$

Ora, quando il mercurio è in V, il contrappeso K è in alto; per cui la sfera m, venendo attirata verso l'alto, apparisce più leggera (donde il segno — già scritto); ma, inoltre, quando il mercurio è stato allontanato, K è in basso, e quindi m apparisce più pesante. Per cui l'azione si raddoppia, ed occorre dire che essa è data da

$$2 f_3 = -\text{mg. } 0{,}00035.$$

Così valutate le varie azioni perturbatrici che si sovrappongono con l'effetto ricercato, mi riservo, nella prossima Nota, di computare il valore corretto di questo.

Matematica. — *Sul metodo di Kronecker per la decomposizione di una funzione razionale intera in un campo ampliato di razionalità.* Nota di Vincenzo Amato, presentata dal Socio Luigi Bianchi [1].

Il Kronecker [2] studia la questione di riconoscere se una funzione intera $f(x)$ coi coefficienti appartenenti ad un campo generale di razionalità $(R, R', R'', \ldots)$ possa, o no, esser posta sotto forma di prodotto di funzioni intere irriducibili coi coefficienti appartenenti allo stesso campo e dà, nel primo caso, un metodo per trovare questi fattori. La prima delle quantità $R, R', R'', \ldots$ è supposta funzione algebrica delle rimanenti.

Il dott. Mazzoni, in una Nota recente [3], considerando un polinomio $f(x)$ a coefficienti razionali, e proponendosi la decomposizione di una tale funzione in fattori irriducibili nel corpo algebrico $[\beta_1]$, essendo β_1 radice

[1] Le osservazioni dell'autore sulla validità, in ogni caso, del metodo di Kronecker, sono perfettamente giuste, poichè in questo metodo il parametro λ figura come un'indeterminata *qualunque*, aggiunta al campo di razionalità. Il dott. Mazzoni invece suppone soltanto λ un numero indeterminato razionale nel campo $[1]$ e dimostra che non occorre ampliare il campo $[1]$ coll'aggiunta di una quantità perfettamente variabile, ma basta supporre $f(x)$ irriducicile in $[1]$, ipotesi ben naturale della questione. Sembra dunque che le osservazioni del dott. Mazzoni, *pur non infirmando il metodo di Kronecker*, vi apportino un perfezionamento opportuno. L. Bianchi.

[2] *Grundzüge einer Arithmetischen Theorie der Algebraischen Grössen*, Leopold Kronecker's Werke, Leipzig, B. G. Teubner, Zweiter Band, 1897, § 4.

[3] *Sul problema dell'irriducibilità di un'equazione in un campo di razionalità generale*, Rend. Lincei, vol. XXVIII, n. 3-4, 1919.