ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

maggiore vicinanza ad m, la maggiore azione è dovuta al galleggiante; e dirò brevemente che il valore di quella differenza è di

$$f_3 = -\text{mg. } 0{,}000174.$$

Ora, quando il mercurio è in V, il contrappeso K è in alto; per cui la sfera m, venendo attirata verso l'alto, apparisce più leggera (donde il segno — già scritto); ma, inoltre, quando il mercurio è stato allontanato, K è in basso, e quindi m apparisce più pesante. Per cui l'azione si raddoppia, ed occorre dire che essa è data da

$$2 f_3 = -\text{mg. } 0{,}00035.$$

Così valutate le varie azioni perturbatrici che si sovrappongono con l'effetto ricercato, mi riservo, nella prossima Nota, di computare il valore corretto di questo.

Matematica. — *Sul metodo di Kronecker per la decomposizione di una funzione razionale intera in un campo ampliato di razionalità.* Nota di Vincenzo Amato, presentata dal Socio Luigi Bianchi [1].

Il Kronecker [2] studia la questione di riconoscere se una funzione intera $f(x)$ coi coefficienti appartenenti ad un campo generale di razionalità $(R, R', R'', \ldots)$ possa, o no, esser posta sotto forma di prodotto di funzioni intere irriducibili coi coefficienti appartenenti allo stesso campo e dà, nel primo caso, un metodo per trovare questi fattori. La prima delle quantità $R, R', R'', \ldots$ è supposta funzione algebrica delle rimanenti.

Il dott. Mazzoni, in una Nota recente [3], considerando un polinomio $f(x)$ a coefficienti razionali, e proponendosi la decomposizione di una tale funzione in fattori irriducibili nel corpo algebrico $[\beta_1]$, essendo β_1 radice

[1] Le osservazioni dell'autore sulla validità, in ogni caso, del metodo di Kronecker, sono perfettamente giuste, poichè in questo metodo il parametro λ figura come un'indeterminata *qualunque*, aggiunta al campo di razionalità. Il dott. Mazzoni invece suppone soltanto λ un numero indeterminato razionale nel campo $[1]$ e dimostra che non occorre ampliare il campo $[1]$ coll'aggiunta di una quantità perfettamente variabile, ma basta supporre $f(x)$ irriducicile in $[1]$, ipotesi ben naturale della questione. Sembra dunque che le osservazioni del dott. Mazzoni, *pur non infirmando il metodo di Kronecker*, vi apportino un perfezionamento opportuno. L. Bianchi.

[2] *Grundzüge einer Arithmetischen Theorie der Algebraischen Grössen*, Leopold Kronecker's Werke, Leipzig, B. G. Teubner, Zweiter Band, 1897, § 4.

[3] *Sul problema dell'irriducibilità di un'equazione in un campo di razionalità generale*, Rend. Lincei, vol. XXVIII, n. 3-4, 1919.

di un'equazione irriducibile in [1], ritiene che per la validità del metodo di Kronecker non basta che $f(x)$ sia priva di radici multiple, come suppone il Kronecker, ma bisogna ammettere addirittura che essa sia irriducibile in [1]. Le obbiezioni che solleva il dott. Mazzoni non hanno però alcun fondamento, perchè proveremo che la condizione di irriducibilità di $f(x)$ in [1] è superflua, come l'altra che $f(x)$ sia priva di radici multiple, valendo in ogni caso il metodo di Kronecker senza alcuna modificazione.

Supponiamo infatti che una funzione $f(x)$ intera a coefficienti razionali sia decomponibile nel prodotto di t fattori irriducibili in $[\beta_1]$ e sia

$$f(x) = f_1(x, \beta_1) \cdot f_2(x, \beta_1) \cdots f_t(x, \beta_1).$$

Se al posto di x si sostituisce $z + \lambda\beta_1$ e poi si cambia β_1 con le radici coniugate $\beta_2, \ldots, \beta_n$ dell'equazione a coefficienti razionali irriducibile in [1], alla quale soddisfa β_1, si ha il seguente quadro:

$$(1) \quad \begin{cases} f(z+\lambda\beta_1) = f_1(z+\lambda\beta_1, \beta_1) \cdot f_2(z+\lambda\beta_1, \beta_1) \cdots f_t(z+\lambda\beta_1, \beta_1) \\ f(z+\lambda\beta_2) = f_1(z+\lambda\beta_2, \beta_2) \cdot f_2(z+\lambda\beta_2, \beta_2) \cdots f_t(z+\lambda\beta_2, \beta_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(z+\lambda\beta_n) = f_1(z+\lambda\beta_n, \beta_n) \cdot f_2(z+\lambda\beta_n, \beta_n) \cdots f_t(z+\lambda\beta_n, \beta_n). \end{cases}$$

Posto

$$(2) \quad F_l(z, \lambda) = f_l(z+\lambda\beta_1, \beta_1) \cdot f_l(z+\lambda\beta_2, \beta_2) \cdots f_l(z+\lambda\beta_n, \beta_n) \quad (l = 1, 2, \ldots, t),$$

sarà $F(z, \lambda)$ una funzione razionale intera di z e λ in [1], e noi ora dimostriamo che il massimo comun divisore delle due funzioni

$$(3) \quad f(z+\lambda\beta_1), \quad F_l(z, \lambda)$$

è il fattore $f_l(z+\lambda\beta_1, \beta_1)$ di $f(z+\lambda\beta_1)$. Poichè, come si vede dal quadro (1), le due funzioni (3) hanno il fattore $f_l(z+\lambda\beta_1, \beta_1)$ in comune, basta provare che i due quozienti

$$\frac{f(z+\lambda\beta_1)}{f_l(z+\lambda\beta_1, \beta_1)}, \quad \frac{F_l(z, \lambda)}{f_l(z+\lambda\beta_1, \beta_1)}$$

sono primi fra loro. E infatti essi si scindono in fattori lineari in z e λ, aventi per il primo quoziente la forma

$$z + \lambda\beta_1 - \alpha,$$

e per il secondo la forma

$$z + \lambda\beta_r - \alpha' \qquad (r \neq 1),$$

essendo α ed α' radici di $f(x) = 0$; e, poichè β_r è diverso da β_1, nessuno dei fattori lineari del primo quoziente può essere identico a qualcuno dei fattori lineari del secondo.

Premesso questo, si può risalire al metodo del Kronecker per la decomposizione di $f(x)$ in fattori irriducibili in $[\beta_1]$. Decomposto il prodotto

$$f(z+\lambda\beta_1)\cdot f(z+\lambda\beta_2)\dots f(z+\lambda\beta_n)$$

(che è funzione di z e λ a coefficienti razionali) in fattori irriducibili in $[1]$, e considerato uno di questi fattori, non primo con $f(z+\lambda\beta_1)$, che diciamo $\Theta(z,\lambda)$, cerchiamo il massimo comune divisore delle funzioni

$$f(z+\lambda\beta_1)\ ,\ \Theta(z,\lambda).$$

Poichè il fattore $\Theta(z,\lambda)$ è ovviamente un divisore del prodotto (2), per un certo indice l, il detto massimo comune divisore è un fattore $f_l(z+\lambda\beta_1,\beta_1)$ di $f(z+\lambda\beta_1)$, e il cambiamento di z in $x-\lambda\beta_1$ fa ottenere il fattore $f_l(x,\beta_1)$, irriducibile in $[\beta_1]$, di $f(x)$.

Resta così provata la validità, in tutti i casi, del metodo di Kronecker, nel quale λ interviene come parametro, affatto arbitrario; ciò che non sembra abbia convenientemente considerato il dott. Mazzoni formulando le sue obbiezioni.

L'ipotesi che la funzione $f(x)$ non abbia radici multiple, che del resto il Kronecker non pone esplicitamente come necessaria, risulta, come abbiamo visto superflua, sebbene possa essere utile, come anche l'altra, più restrittiva, della irriducibilità in $[1]$ della funzione, per semplificare il procedimento nell'applicazione pratica del metodo.

Matematica. — *Equazioni differenziali di Abel riducibili alle quadrature.* Nota di Pio Scatizzi S. J., presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Questa Nota fa seguito ad un'altra [1] in cui si dimostrava che la equazione Euleriana

$$[1]\qquad \frac{d\Theta}{dx}+\frac{\Phi_1}{\Theta}+\Phi_2=0$$

poteva ricavarsi da un'equazione differenziale di Abel del tipo

$$[2]\qquad y'+Ay^3+By^2+Cy+D=0$$

(con A, B, C, D funzioni della sola x) quando su questa si fosse operata la trasformazione

$$[3]\qquad y=u+\frac{1}{\Theta}\varphi,$$

[1] Dott. Pio Scatizzi S. J., *Soluzione di alcune equazioni del tipo di Abel* (questi Rendiconti, vol. XXVI, serie 5ª, 2° sem., fasc. 3°. Roma, agosto 1917).