

RE
A T T I
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.
1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Matematica. — *Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali.* Nota III del Corrispondente GINO FANO (1).

1. La presente Nota è dedicata alla superficie del 4° ordine più generale, F^4 , contenente un punto doppio O e una retta r passante per questo punto (superficie dipendente da 17 moduli). Anche questa superficie, come quella oggetto delle due Note precedenti (2), non ammette trasformazioni proiettive. Invero, una trasformazione così fatta non potrebbe lasciare fissi tutti i punti della retta r , perchè sarebbero allora invarianti anche le singole cubiche γ segate sopra F^4 dai piani per r ; mentre invece una cubica piana non ammette trasformazioni proiettive aventi come punti uniti tutti i punti di una retta generica del suo piano (quale è appunto la r per le γ). Sulla r (certo unita) verrebbe dunque subordinata una proiettività ciclica, per la quale sarebbe O un punto unito; e poichè nel fascio $|\gamma|$ vi sono due cubiche tangenti a r fuori di O , queste due dovrebbero venire scambiate fra loro, e così i loro punti di contatto con r . Il quadrato di questa (supposta) omografia determinerebbe dunque l'identità sopra r , e perciò anche sopra F^4 ; l'omografia stessa sarebbe dunque involutoria, il che non è possibile, in quanto F^4 dovrebbe allora dipendere da soli 11 moduli al più (3).

Il gruppo delle trasformazioni birazionali di F^4 si rispecchierà pertanto in un gruppo oloedricamente isomorfo di sostituzioni lineari della forma fondamentale della superficie.

La superficie F^4 , essendo condotta nel modo più generale per il punto O , che si suppone doppio per essa, e per la retta r , conterrà soltanto curve composte mediante le sezioni piane, il punto doppio (considerato come curva d razionale, di ordine zero, e grado -2), e la retta r . Introducendo nella base, in luogo delle sezioni piane C , le cubiche $\gamma \equiv C - d - r$, segate dai piani per r , il determinante della base (d, r, γ) sarà

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 14.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1920.

(2) Ved. questi Rendiconti, 1° sem. 1920 (vol. 29), pp. 408 e 485. A queste Note rinvio per la citazione precisa delle Memorie qui richiamate in modo abbreviato.

(3) Severi, *Complementi ecc.*, n. 12, b).

La detta base è dunque intermediaria, e perciò minima, non avendo il numero 14 nessun divisore > 1 e quadrato perfetto. Ogni curva di F^4 potrà esprimersi mediante una combinazione $xd + yr + sz$, per valori interi (positivi, negativi, o nulli) di x, y, z . Notiamo in particolare che le curve $\gamma + r \equiv C - d$ sono le quartiche di genere 2 segate dai piani passanti per il punto doppio.

La forma fondamentale della superficie è

$$(1) \quad f \equiv -2x^2 - 2y^2 + 2xy + 2xz + 4yz.$$

2. Sulla superficie F^4 si possono facilmente assegnare due trasformazioni birazionali:

a) L'involuzione **I** risultante dalla proiezione doppia di F^4 dal punto doppio O . Questa trasformazione muta in sè stessa ogni cubica γ , nonchè la retta r ; e fa corrispondere all'intorno (d) del punto doppio O la curva intersezione di F^4 col cono quadrico ad essa tangente in O medesimo, all'infuori della r (che di tale intersezione è parte). Poichè quest'intersezione, compresa anche la r , è espressa da $2(C - d) - d \equiv 2(r + \gamma) - d$, l'involuzione **I** opererà sulle curve di F^4 e, conseguentemente, sulle x, y, z nel modo seguente:

$$(2) \quad \begin{cases} d' = -d + r + 2\gamma \\ r' = r \\ \gamma' = \gamma \end{cases} \quad (2')^{(1)} \quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = x + y \\ z' = 2x + z \end{cases}$$

b) Una trasformazione non ciclica **S** sopra le singole cubiche γ , costruita in modo analogo alle F_1 e F_2 delle due Note precedenti. Essendo razionalmente noti, sopra ogni γ , il punto O (doppio per F^4) e la coppia di punti A, B intersezioni ulteriori con r , sarà ivi definita la trasformazione:

$$P' \equiv P + 2 \cdot O - (A + B).$$

Applicando tale trasformazione, sopra ogni γ , al punto ivi segnato dall'intorno d del punto doppio, e ai 2 punti segnati da r , si vede che le curve d'' e r'' , trasformate rispett. di d e di r , potranno differire rispett. da $d + 2d - r \equiv 3d - r$ e da $r + 4d - 2r \equiv 4d - r$ solo per multipli di γ ; sarà cioè:

$$d'' = 3d - r + k\gamma \quad r'' = 4d - r + i\gamma$$

dove i coefficienti incogniti k, i potranno determinarsi in base alla proprietà che tanto d'' quanto r'' devono essere (come d ed r) di grado virtuale -2 . Si ricava $k = 12, i = 10$. La **S** opererà pertanto sulle curve di F^4 e

(1) Interpretando le x, y, z come coordinate proiettive omogenee nel piano, la (2') è l'omologia armonica di asse $x = 0$ e centro $(-2, 1, 2)$.

rispett. sulle x, y, z nel modo seguente:

$$(3) \begin{cases} d'' = 3d - r + 12\gamma \\ r'' = 4d - r + 10\gamma \\ \gamma'' = \gamma \end{cases} \quad (3') \begin{cases} x'' = 3x + 4y \\ y'' = -x - y \\ z'' = 12x + 10y + z \end{cases}$$

Dimostreremo che sopra F^4 non esistono altre trasformazioni birazionali all'infuori di quelle composte mediante \mathbf{I} ed \mathbf{S} ⁽¹⁾ ⁽²⁾.

3. Vediamo ora se sulla superficie F^4 esistano altre curve ellittiche, effettive e irriducibili, all'infuori delle cubiche γ . A tal uopo, occorre anzitutto trovare le soluzioni intere dell'equazione $f=0$, ossia:

$$x^2 + y^2 - xy - xz - 2yz = 0.$$

⁽¹⁾ La trasformazione determinata da \mathbf{S} sopra ogni singola γ è il prodotto della \mathbf{I} per l'altra involuzione che ivi risulta dalla proiezione doppia fatta dal punto tangenziale di \mathbf{O} (anch'esso razionalmente noto). Perciò, anche sopra F^4 , la \mathbf{S} è il prodotto di \mathbf{I} per un'altra involuzione; e il gruppo complessivo di F^4 si potrà generare anche con queste due involuzioni.

⁽²⁾ Si può riconoscere facilmente che invece *Sulla F^4 più generale contenente un (solo) punto doppio* (non contenente perciò nessuna curva effettiva, all'infuori delle intersezioni complete con altre superficie) *non vi sono altre trasformazioni birazionali all'infuori dell'involuzione che risulta dalla proiezione della superficie stessa dal punto doppio*. Sopra tale superficie, una base minima è costituita dal punto doppio d e dalle sezioni piane δ condotte per esso (di genere 2); il determinante di questa base vale infatti -8 , e ammette perciò come unico divisore quadrato perfetto il 4; mentre il determinante di altra base, essendo anche del tipo $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ con a_{11}, a_{22} pari, non potrebbe in nessun caso assumere il valore $-8:4 = -2$. Dico che, sopra questa F^4 , la rete $|\delta|$ è la sola rete di curve effettive, irriducibili, di genere 2. Invero, la determinazione di queste reti, di grado virtuale anche 2, e del tipo $x\delta + yd$, dipende dalla risoluzione in numeri interi dell'equazione $x^2 + 2xy - y^2 = 1$; la quale, mediante la sostituzione $x = t - u, y = u$, si trasforma nell'equazione di Fermat-Pell:

$$(1) \quad t^2 - 2u^2 = 1.$$

Le reti di genere 2 sono date perciò dalle combinazioni $(t - u)\delta + ud$, colla condizione (1); avvertendo inoltre che si avranno curve effettive (ossia di ordine > 0) solo per $t > u$, e perciò (essendo altresì $t^2 > 2u^2$) per valori positivi di t . Essendo inoltre:

$$(t - u)\delta + ud \equiv (t - u)(\delta + d) + (2u - t)d,$$

si vede che, per u positivo (nel qual caso $u < t < 2u$), l'accennata combinazione risulta dalla somma di un multiplo del sistema delle sezioni piane $|\delta + d|$, di genere 3 e dimensione 3, e del punto doppio, contato $2u - t$ volte; è dunque un sistema riducibile (poichè detto punto doppio, contato $2u - t$ volte, è parte fissa del sistema). Per u negativo, si hanno i sistemi trasformati dei precedenti mediante la proiezione dal punto doppio di F^4 (la quale corrisponde alla sostituzione $t' = t, u' = -u$); anch'essi dunque riducibili. Rimane perciò la sola soluzione $u = 0, t = 1$, che conduce alla rete $|\delta|$. Infine, è pure ovvio che la forma quadratica $t^2 - 2u^2$ (equivalente alla $x^2 + 2xy - y^2$) non ammette altre sostituzioni lineari che mutino in sè la soluzione $t = 1, u = 0$, cioè la rete $|\delta|$, all'infuori della sostituzione $t' = t, u' = -u$, alla quale corrisponde sopra F^4 la sola proiezione dal punto doppio.

Poichè z vi compare soltanto a 1° grado, si ricava $z = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x + 2y}$; e le soluzioni intere sono perciò date dalle formole:

$$(4) \quad x = kp(p + 2q) \quad y = kq(p + 2q) \quad z = k(p^2 - pq + q^2)$$

per valori interi non entrambi nulli di p e q (uno dei quali potrà supporre non negativo), mentre k potrà anche assumere convenienti valori fratti.

Introducendo come nuovo parametro, in luogo di q , il valore $q_0 = p + 2q$, che è pure numero intero ogni qualvolta siano tali p e q , si ricavano per x, y, z le nuove espressioni (nelle quali sopprimiamo l'indice di q_0 , scrivendo q in luogo di q_0):

$$(5) \quad \begin{aligned} x &= kpg & y &= \frac{k}{2}q(q - p) \\ z &= \frac{k}{4}(7p^2 + q^2 - 4pq) = \frac{k}{4}\{3p^2 + (2p - q)^2\}. \end{aligned}$$

Sopra questi ultimi parametri, l'involuzione **I** determina la sostituzione involutoria $p' = p, q' = -q$, e la **S** determina la sostituzione parabolica $p'' = p + 2q, q'' = q$.

Per le soluzioni (4) o (5) che conducono a curve ellittiche $xd + yr + zy$ effettive e irriducibili, dovranno inoltre verificarsi le condizioni seguenti:

1°. L'ordine $y + 3z$ di tale curva deve essere > 0 . E poichè dalle (4) si ricava $y + 3z = k(3p^2 - 2pq + 5q^2)$, dove la forma entro parentesi è definita e positiva, sarà altresì $k > 0$.

2°. Essendo $k > 0$, dall'ultima delle (4), dove $p^2 - pq + q^2$ è anche forma definita positiva, segue che sarà pure $z > 0$.

3°. Disponendo ad arbitrio del segno di uno dei parametri p e q , possiamo supporre, nelle (5), $p \geq 0$. E possiamo supporre ivi altresì $q > 0$, poichè per $q = 0$ si ha soltanto il fascio $|y|$ (prescindendo dai suoi multipli, che sono riducibili); e, se fosse $q < 0$, potremmo riferirci alle curve trasformate di quelle in esame, mediante la **I**.

Essendo nelle (5) $k > 0, p \geq 0, q > 0$, sarà altresì $x \geq 0$. D'altra parte la combinazione $xd + yr + zy$, per valori positivi o nulli delle x, y, z , non può mai essere un fascio di curve ellittiche, effettive e irriducibili, distinto da $|y|$. Per un tal fascio (distinto sempre da $|y|$) dovrà perciò essere negativo almeno un coefficiente; e questo, essendo già $z > 0, x \geq 0$, non può essere che y . Ora, $y < 0$ implica $p > q$; e allora, applicando al corrispondente fascio di curve ellittiche la trasformazione inversa di **S** (colla quale si muta p in $p - 2q$, lasciando invariato q), eventualmente più volte, se ne ricaverebbe un altro fascio, pel quale sarebbe $|p| \leq q$. Per quest'ultimo fascio, o per il suo trasformato mediante **I**, sarebbero dunque p e q positivi con $p \leq q$, il che va escluso.

Sulla superficie F^4 non esiste dunque nessun fascio di curve ellittiche, effettive ed irriducibili, all'infuori del fascio di cubiche γ . Perciò qualunque trasformazione birazionale sopra F^4 muterà in sè stesso quest'ultimo fascio (e risulterà anzi dal seguito ch'essa deve lasciare invariata ogni singola curva di tale fascio).

4. Si indichi ora con T una qualsiasi trasformazione birazionale della superficie F^4 . Poichè essa muta il fascio di cubiche $|\gamma|$ in sè stesso, dovrà trasformare l'intorno d del punto doppio in una linea $xd + yr + zy$ unisecante le γ . D'altra parte, il numero dei punti d'intersezione della linea $xd + yr + zy$ colle γ è $x \cdot 1 + y \cdot 2 + z \cdot 0 = x + 2y$; sarà perciò $x + 2y = 1$; e possiamo porre $y = k$, $x = -(2k - 1)$. Il valore di z si può allora determinare eguagliando a -2 il grado virtuale della curva in parola, e si trova così $z = k(7k - 5)$. Detta curva, unisecante le γ , sarà perciò del tipo:

$$-(2k - 1)d + kr + k(7k - 5)\gamma$$

e la indicheremo (in corrispondenza ai singoli valori interi di k) con η_k . Si verifica allora che, applicando alla linea η_k l'operazione S , essa si muta nella η_{k-1} (p. es. la η_0 , che è lo stesso intorno d , si muta in

$$d'' = 3d - r + 12\gamma = \eta_{-1} \quad (1).$$

Supponiamo pertanto che l'operazione T sopra considerata trasformi l'intorno d nella linea η_k , unisecante le γ . Allora il prodotto $T \cdot S^k$ riporterà l'intorno d alla sua posizione iniziale; e per conseguenza (lasciando esso invariati d e il fascio $|\gamma|$) detto prodotto opererà sopra i sistemi di curve della superficie F^4 secondo una sostituzione del tipo

$$\begin{cases} d^* = d \\ r^* = ad \pm r + b\gamma \\ \gamma^* = \gamma \end{cases}$$

dove a e b sono coefficienti ancora sconosciuti, ma che si possono determinare tenendo conto del fatto che la linea r^* deve incontrare d in un punto e γ in due punti. Secondo che, nell'espressione di r^* , si prende per r il segno superiore o quello inferiore, si hanno per a e b le due equazioni:

$$-2a + 1 + b = 1 \quad a + 2 = 2$$

(1) La linea η_k ha come *linea satellite* rispetto al fascio $|\gamma|$ (cioè come luogo dei tangenziali dei suoi punti, sopra le singole γ) la linea $\eta_{-(2k-1)}$. Infatti la somma $2\eta_k + \eta_{-(2k-1)}$ differisce da $d + r$ (la quale ultima sega sulle γ una terna di punti allineati) solo per un multiplo di γ .

da cui $a = b = 0$; oppure:

$$-2a - 1 + b = 1 \quad a - 2 = 2$$

da cui $a = 4$, $b = 10$. Nel primo caso si ha l'identità, onde $T = S^{-k}$; nel secondo caso si ha l'involuzione:

$$\begin{cases} d^* = d \\ r^* = 4d - r + 10\gamma \\ \gamma^* = \gamma \end{cases}$$

la quale non è altro che il prodotto $I \cdot S$; perciò $T = IS^{-(k-1)}$.

La superficie F^4 non ammette dunque altre trasformazioni birazionali, all'infuori delle operazioni I ed S , e loro prodotti. Di queste, è già noto che lasciano invariata ogni singola curva γ .

Si ottengono già tutte le trasformazioni anzidette, prendendo le potenze (positive e negative) di S , e i loro prodotti (a destra oppure a sinistra) per I .

Le sostituzioni lineari della forma fondamentale f in cui si rispecchiano le trasformazioni birazionali di F^4 non esauriscono però il gruppo complessivo di f ⁽¹⁾.

Matematica. — *Differenziali controvarianti*. Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI ⁽²⁾.

In una mia Nota, pubblicata recentemente in questi Rend., è messa in luce l'importanza che avrebbe per certi studi l'introduzione dei differenziali *controvarianti*, quando come forma fondamentale non si assumesse più (come negli studi del Ricci di calcolo assoluto) una forma differenziale quadratica del primo ordine, ma una forma del primo ordine e di grado qualunque ⁽³⁾. La generalizzazione non sembra agevole; qui farò un primo passo, definendo i differenziali controvarianti del *secondo* ordine; e, soltanto per semplicità di notazioni, assumerò a forma fondamentale una forma cubica

$$F = \Sigma b_{rst} du_r du_s du_t.$$

⁽¹⁾ La forma f ammette per es. la sostituzione involutoria

$$x' = -x + y + z, \quad y' = y, \quad z' = z$$

la quale, applicata ai sistemi di curve di F^4 , opererebbe su di essi nel modo seguente:

$$d' = -d, \quad r' = d + r, \quad \gamma' = d + \gamma$$

trasformando perciò sistemi irriducibili in sistemi riducibili.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1920.

⁽³⁾ Cfr. la mia Nota, *I differenziali controvarianti*, negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LIV (1918), pp. 5-7.