ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

da cui $a = b = 0$; oppure:

$$-2a - 1 + b = 1 \qquad a - 2 = 2$$

da cui $a = 4$, $b = 10$. Nel primo caso si ha l'identità, onde $T = S^{-k}$; nel secondo caso si ha l'involuzione:

$$\begin{cases} d^* = d \\ r^* = 4d - r + 10\gamma \\ \gamma^* = \qquad\quad \gamma \end{cases}$$

la quale non è altro che il prodotto $I \cdot S$; perciò $T = I S^{-(k-1)}$.

La superficie F^4 *non ammette dunque altre trasformazioni birazionali, all'infuori delle operazioni* I *ed* S, *e loro prodotti*. Di queste, è già noto che lasciano invariata ogni singola curva γ.

Si ottengono già tutte le trasformazioni anzidette, prendendo le potenze (positive e negative) di S, e i loro prodotti (a destra oppure a sinistra) per I.

Le sostituzioni lineari della forma fondamentale f in cui si rispecchiano le trasformazioni birazionali di F^4 *non esauriscono* però il gruppo complessivo di f [1].

Matematica. — *Differenziali controvarianti*. Nota del Corrispondente Guido Fubini [2].

In una mia Nota, pubblicata recentemente in questi Rend., è messa in luce l'importanza che avrebbe per certi studî l'introduzione dei differenziali *controvarianti*, quando come forma fondamentale non si assumesse più (come negli studî del Ricci di calcolo assoluto) una forma differenziale quadratica del primo ordine, ma una forma del primo ordine e di grado qualunque [3]. La generalizzazione non sembra agevole; qui farò un primo passo, definendo i differenziali controvarianti del *secondo* ordine; e, soltanto per semplicità di notazioni, assumerò a forma fondamentale una forma cubica

$$F = \Sigma b_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t\,.$$

[1] La forma f ammette per es. la sostituzione involutoria

$$x' = -x + y + z\,, \; y' = y\,, \; z' = z$$

la quale, applicata ai sistemi di curve di F^4, opererebbe su di essi nel modo seguente:

$$d' = -d\,, \; r' = d + r\,, \; \gamma' = d + \gamma$$

trasformando perciò sistemi irriducibili in sistemi riducibili.

[2] Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1920.

[3] Cfr. la mia Nota, *I differenziali controvarianti*, negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LIV (1918), pp. 5-7.

Cambiando variabili coordinate, si abbia

$$F = \Sigma b'_{rst}\, du'_r\, du'_s\, du'_t\,,$$

ove u', b' siano le nuove variabili, e i nuovi coefficienti; sarà

$$b'_{ijl} = \sum_{r,s,t} b_{rst} \frac{\partial u_r}{\partial u'_i} \frac{\partial u_s}{\partial u'_j} \frac{\partial u_t}{\partial u'_l}.$$

Posto, generalizzando i simboli di Christoffel:

$$\begin{bmatrix} r\,s\,t \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \left\{ \frac{\partial b_{vst}}{\partial u_r} + \frac{\partial b_{rvt}}{\partial u_s} + \frac{\partial b_{rsv}}{\partial u_t} - \frac{\partial b_{rst}}{\partial u_v} \right\}$$

troviamo facilmente che:

$$\begin{bmatrix} i\,j\,l \\ m \end{bmatrix}' = \sum_{r,s,t,v} \begin{bmatrix} r\,s\,t \\ v \end{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial u'_i} \frac{\partial u_s}{\partial u'_j} \frac{\partial u_t}{\partial u'_l} \frac{\partial u_v}{\partial u'_m} +$$

$$+ \frac{1}{3} \Sigma b_{rst} \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_i\, \partial u'_j} \frac{\partial u_s}{\partial u'_j} \frac{\partial u_t}{\partial u'_m} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_j\, \partial u'_l} \frac{\partial u_s}{\partial u'_m} \frac{\partial u_t}{\partial u'_i} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_l\, \partial u'_i} \frac{\partial u_s}{\partial u'_j} \frac{\partial u_t}{\partial u'_m} \right].$$

Indichiamo con B_r, C_r, D_r, E_r quattro sistemi controvarianti, distinti o no. (Per es. poniamo $B_r = C_r = D_r = E_r = du_r$). Posto

$$a_{rs} = \sum_t b_{rst} B_t\,,$$

indicato con A_{rs} il complemento di a_{rs} nel determinante $|a_{rs}|$ diviso per $|a_{rs}|$, sarà:

$$a'_{ij} = \Sigma a_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial u'_i} \frac{\partial u_s}{\partial u'_j} \qquad A'_{ij} = \Sigma A_{rs} \frac{\partial u'_i}{\partial u_r} \frac{\partial u'_j}{\partial u_s}.$$

(equazioni che si possono derivare rispetto alle u, se le B sono funzioni soltanto delle u, ma **non** si possono derivare se per es. $B_r = du_r$).

Deduciamo facilmente dalle formole precedenti, posto:

$$\sum_m A_{m\mu} \begin{bmatrix} i\,j\,l \\ m \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} i\,j\,l \\ \mu \end{Bmatrix},$$

che:

$$\begin{Bmatrix} i\,j\,l \\ \mu \end{Bmatrix}' = \sum_{\sigma,r,s,t} \begin{Bmatrix} r\,s\,t \\ \sigma \end{Bmatrix} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_\sigma} \frac{\partial u_r}{\partial u'_i} \frac{\partial u_s}{\partial u'_j} \frac{\partial u_t}{\partial u'_l} +$$

$$+ \frac{1}{3} \sum_{\substack{\rho,\sigma \\ r,s}} A_{\rho\sigma} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_\sigma} b_{rs\rho} \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_i\, \partial u'_j} \frac{\partial u_s}{\partial u'_l} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_i\, du'_l} \frac{\partial u_s}{\partial u'_j} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_j\, \partial u'_l} \frac{\partial u_s}{\partial u'_i} \right].$$

Donde:

$$\sum_{i,j,l,\mu} \frac{\partial u_\gamma}{\partial u'_\mu} \left\{ \begin{matrix} i\, j\, l \\ \mu \end{matrix} \right\}' C'_i\, D'_j\, E'_l = \sum_{r,s,t} \left\{ \begin{matrix} r\, s\, t \\ \gamma \end{matrix} \right\} C_r\, D_s\, E_t +$$

$$+ \frac{1}{3} \sum A_{\rho\gamma}\, b_{rs\rho} \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_i\, \partial u'_j} \frac{\partial u'_i}{\partial u_h} \frac{\partial u'_j}{\partial u_k} C_h\, D_k\, E_s + \frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_i\, \partial u'_l} \frac{\partial u'_i}{\partial u_h} \frac{\partial u'_l}{\partial u_k} C_h\, D_s\, E_k + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u_r}{\partial u'_j\, \partial u'_l} \frac{\partial u'_j}{\partial u_h} \frac{\partial u'_l}{\partial u_k} C_s\, D_h\, E_k \right].$$

D'altra parte, se F_r è un sistema controvariante, si ha:

$$\sum_\mu \frac{\partial u_\gamma}{\partial u'_\mu} dF'_\mu = dF_\gamma - \sum \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial u'_i\, \partial u'_j} \frac{\partial u'_i}{\partial u_h} \frac{\partial u'_j}{\partial u_k} F_h\, du_k\,,$$

come si vede, differenziando la $F_\gamma = \sum \frac{\partial u_\gamma}{\partial u'_\mu} F'_\mu$ e ricordando che

$$F'_\mu = \sum_r \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_r} F_r \quad , \quad du'_i = \sum_s \frac{\partial u'_i}{\partial u_t} du_t\,.$$

Supposto $B_r = C_r = D_r = E_r = F_r = du_r$, ricordando che:

$\sum_s b_{rst}\, du_s = a_{rt}$ e che $\sum_r a_{rt}\, A_{rs} = \varepsilon_{st}$ ($\varepsilon_{ss} = 1$, $\varepsilon_{st} = 0$ per $s \neq t$),

otterremo, sommando le formole precedenti, che:

$$\sum_\mu \frac{\partial u_\gamma}{\partial u'_\mu} \left[d^2 u'_\mu + \sum_{i,j,l} \left\{ \begin{matrix} i\, j\, l \\ \mu \end{matrix} \right\}' du'_i\, du'_j\, du'_l \right] = d^2 u_\gamma + \sum_{r,s,t} \left\{ \begin{matrix} r\, s\, t \\ \gamma \end{matrix} \right\} du_r\, du_s\, du_t\,.$$

Indicato con $\delta^2 u_\gamma$ il secondo membro, ne deduciamo che $\delta^2 u_1$, $\delta^2 u_2$, ... costituiscono appunto, come si voleva, un sistema controvariante. Si noti, per maggior chiarezza, che i simboli $\left\{ \begin{matrix} r\, s\, t \\ \gamma \end{matrix} \right\}$ sono soltanto formalmente analoghi ai simboli di Christoffel; infatti *essi* (come le A_{rs} da noi definite ponendo $B_r = du_r$) *sono espressioni omogenee di grado* -1 *nei differenziali* du_r: essi sono precisamente frazioni, il cui denominatore è lo Hessiano della forma differenziale data. Che questo Hessiano debba comparire come denominatore, quando si vogliano estendere le formole del calcolo assoluto, si deduce facilmente *a priori*, quando si voglia generalizzare la teoria delle linee geodetiche [1]. Dai risultati di questa Nota segue il teorema: *Lo studio di un sistema di forme differenziali del primo o del secondo ordine* (di grado anche maggiore di 2) *si può sempre ridurre allo studio di un sistema di forme del primo ordine.* (Cfr. l'ultima osservazione della Nota citata per le applicazioni di questo teorema).

[1] Cfr. Lipschitz, *Untersuch. in Betreff der ganzen homog. Functionen von n Differentialen* [Journ. für die reine u. augewandte Mathem., Band 70 (1869), pp. 71-102]. In questa Memoria è studiato un problema di variazione analogo a quello delle linee geodetiche.