ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Geometria. — *Determinazione proiettiva di una congruenza W.* Nota di MARIA TERESA AMBROSETTI, presentata dal Corrispondente GUIDO FUBINI [1].

Il metodo dato dal sig. Fubini di determinare, dal punto di vista proiettivo, una congruenza di rette [2], si estende alle congruenze W. Sieno x, y, ecc., coordinate di retta legate dalla equazione

$$S\,x^2 = x^2 + y^2 + z^2 + p^2 + q^2 + l^2 = 0.$$

Se esse sono funzioni di due parametri u, v, la retta genererà una congruenza.

Posto $\varphi_2 = \sum_{r,s} a_{rs}\, du_r\, du_s = S dx^2$, l'equazione delle sviluppabili si otterrà uguagliando φ_2 a zero. *Supposto non nullo il discriminante* Δ di φ_2, indicheremo con A_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} in Δ, diviso per Δ, con x_i, x_{ij}, ecc. derivate covarianti secondo φ_2; porremo

$$D_2\, x = \sum x_{ij}\, du_i\, du_j\ ,\ D_3\, x = \sum x_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t\ ,$$
$$\varphi_4 = -S(D_2\, x)^2 = S d\, x\, D_3 x = \sum k_{rsij}\, du_r\, du_s\, du_i\, du_j$$
$$(r, s, t, i, j = 1, 2).$$

Data la φ_4, si dimostra come loc. cit. che restano determinate le

$$h_{rspq} = S x_r\, x_{pqs} = -S x_{rs}\, x_{pq} \quad \text{e le} \quad S x_{rs}\, x_{ijt}\,.$$

Se la congruenza è W, le x, y, ecc. soddisfano a una stessa equazione

$$A x_{11} + 2B x_{12} + C x_{22} + \alpha x_1 + \beta x_2 + M x = 0 \ \text{(e analoghe in } y, z, \ldots).$$

Moltiplicando per x_i e sommando con le analoghe, si trova $\alpha = \beta = 0$, cosicchè, *supposto* $M \neq 0$, l'equazione si ridurrà al tipo

$$(1) \qquad C_{11}\, x_{11} + 2\, C_{12}\, x_{12} + C_{22}\, x_{22} + x = 0 \ \text{(e analoghe in } y, \ldots.)$$

dove le C_{rs} formano un sistema controvariante. Indicheremo con c_{rs} il sistema covariante duale, ponendo poi $\psi_2 = \sum c_{rs}\, du_r\, du_s$. Moltiplicando (1) per x e sommando con le analoghe, si trova

$$(2) \qquad 0 = \sum C_{rs}\, a_{rs}\,.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1920.

[2] Cfr. le Note di Fubini in questi Rendiconti, serie 5ª, vol. XXVII, pag. 304, e vol. XXVIII, pag. 32.

Supporremo $c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2 \neq 0$.

Il determinante $(x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_1, x_2, x)$ [1] è nullo. Indicheremo con $\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa, \lambda$ i complementi dell'ultima colonna divisi per

$$\sqrt{c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2}\,\sqrt{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2}.$$

È facile riconoscere che

1°) Le $\xi, \eta, ..$ non variano cambiando i parametri u_1, u_2.

2°) Le $\xi, \eta, ...$ restano divise per ϱ, se si moltiplicano le coordinate *omogenee* $x, y, ...$ per uno stesso fattore ϱ.

3°) Le $\xi, \eta, ...$ sono le coordinate del complesso lineare osculatore.

Si trova

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \pi^2 + \varkappa^2 + \lambda^2 = S\xi^2 = \tag{3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta^3}}\,\frac{1}{\sqrt{c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2}}\,(x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_1, x_2, \xi)\ [2].$$

Porremo

$$h = \begin{vmatrix} h_{1111} & h_{1112} & h_{1122} \\ h_{1211} & h_{1212} & h_{1222} \\ h_{2211} & h_{2212} & h_{2222} \end{vmatrix} \qquad H = \begin{vmatrix} H_{1111} & H_{1112} & H_{1122} \\ H_{1211} & H_{1212} & H_{1222} \\ H_{2211} & H_{2212} & H_{2222} \end{vmatrix}.$$

È

$$H\Delta^3 = H \begin{vmatrix} a_{11}^2 & 2a_{11}\,a_{12} & a_{12}^2 \\ a_{11}\,a_{12} & a_{11}\,a_{22} + a_{12}^2 & a_{12}\,a_{22} \\ a_{12}^2 & 2a_{12}\,a_{22} & a_{22}^2 \end{vmatrix} = h.$$

Supposto non degenere il complesso lineare osculatore, e quindi $S\xi^2 \neq 0$, avremo, innalzando (3) al quadrato, e dividendo per $S\xi^2$, che

$$S\xi^2 = \frac{h}{\Delta^2(c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2)} \quad \text{ossia} \quad H = \frac{c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2}\,S\xi^2.$$

Potremo *fissare le coordinate omogenee x in guisa che* $S\xi^2 = \varepsilon$ $(\varepsilon = \pm 1)$; così *tali coordinate omogenee saranno determinate senza ambiguità in modo indipendente dalla scelta delle u_1, u_2, che si conserva per trasformazioni proiettive*; e sarà

$$H = \varepsilon\,\frac{c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2}. \tag{4}$$

[1] Come in loc. cit., con questa notazione indico il determinante, di cui gli elementi scritti tra ( ) formano la prima riga, e le altre righe si deducono sostituendo alla x le y, z, ecc.

[2] Con $(x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_1, x_2, \xi)$ indico il determinante, di cui la prima riga è formata dalle quantità scritte tra ( ) e le altre se ne deducono sostituendo alle x, ξ le y, η, oppure le z, ζ, ecc.

Affinchè la congruenza sia completamente determinata a meno di una collineazione, basterà pertanto che siano determinati i coefficienti α, β, γ, b, e, d delle seguenti equazioni differenziali:

$$(5) \qquad x_{rst} = \sum_{i,j,m,n} \alpha_{rstij} A_{im} A_{jn} x_{mn} + \sum_{i,j} \beta_{rsti} A_{ij} x_j + \gamma_{rst} \xi$$

$$(6) \qquad \xi_r = \sum b_{rij} A_{im} A_{jn} x_{mn} + \sum e_{ri} A_{ij} x_j + d_{rst} \xi$$

$$(r, s, t, m, n, i, j = 1, 2)$$

a cui soddisfano sia le x, ξ, che le y, η, che le z, ζ, ecc.

Supponiamo, per fissar le idee, $\varepsilon = 1$. Formole analoghe si hanno se $\varepsilon = -1$.

Moltiplicando ciascuna di queste equazioni per ξ, o per x, o per x_r, o per x_{rs} e sommando con le analoghe, si trova facilmente che le e e le d della (6) sono nulle, che le γ non sono che i coefficienti della forma $\varphi_3 = S \xi D_3 x$, che $\beta_{rsti} = \sum x_{rst} x_i = h_{irst}$; e infine che le α, b sono determinate dalle

$$S x_{pq} x_{rst} = \sum_{i,j,m,n} \alpha_{rstij} A_{im} A_{jn} h_{mnpq}$$

$$S \xi_r x_{pq} = \sum b_{rij} A_{im} A_{jn} h_{mnpq} .$$

Questi sono sistemi di equazioni lineari nelle incognite α e b; il determinante dei coefficienti di tali incognite coincide, a meno di un fattore numerico, con la quantità $H \neq 0$ data da (4); restano così completamente determinate le α, b.

La congruenza resta perciò determinata dalle forme $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_2$, legate dalle (4), (2) e dalle condizioni di integrabilità delle (5), (6), (1). La brevità dello spazio mi impedisce di sviluppare tutte queste relazioni, e di esaurire lo studio di quei casi estremamente particolari (specialmente quello in cui $M = 0$, oppure $S \xi^2 = 0$), che abbiamo escluso in questo studio. Questi calcoli si fanno nel modo più semplice, assumendo a linee coordinate u_i le sviluppabili (per cui $\varphi_2 = 0$), oppure le assintotiche delle falde focali (per cui $\psi_2 = 0$).