

RE  
A T T I  
DELLA  
REALE ACCADEMIA NAZIONALE  
DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.  
1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Termodinamica. — *Sulle trasformazioni isentropiche di certi sistemi univarianti*. Nota di UGO BORDONI, presentata dal Socio CASTELNUOVO (1).

1. Lo studio quantitativo delle trasformazioni isentropiche dei sistemi univarianti del tipo dei miscugli di un vapore saturo e del proprio liquido riesce grandemente agevolato dalle semplici osservazioni che seguono; le quali, se fossero state fatte in addietro, avrebbero probabilmente contribuito a contrastare lo sviluppo, in questa parte della termodinamica applicata, di alcuni di quei procedimenti di carattere empirico, concettualmente poco soddisfacenti e di impiego non privo di pericoli, che sono per lo più l'indizio della incompleta maturità del ramo della scienza al quale si riferiscono.

2. L'equazione, nelle variabili  $T$  (temp. ass.) ed  $x$  (titolo, del vapore o della fase corrispondente, se si tratta di altri sistemi) delle trasformazioni isentropiche dei sistemi univarianti del tipo sopra accennato viene messa generalmente sotto la forma:

$$(1) \quad \gamma_1 \cdot dT + T \cdot d\left(\frac{xr}{T}\right) = 0$$

indicando con  $r$  il calore di trasformazione e con  $\gamma_1$  il calore specifico del liquido (o della fase corrispondente); il quale  $\gamma_1$  vien fatto quasi sempre coincidere non solo numericamente, ma anche concettualmente (lo si può constatare esaminando libri e pubblicazioni varie, italiane e straniere, antiche e recenti) col calore specifico *a pressione costante*. Ora, ammettere questa ultima coincidenza significa fare un vero e proprio errore, in quanto, dovendosi necessariamente supporre (implicitamente o no), per giungere alla (1), decomposta ogni trasformazione infinitesima del sistema in due altre, l'una *a temperatura costante* e l'altra *a titolo costante*, per  $\gamma_1$  deve intendersi, senza ombra di dubbio, il « *calore specifico a titolo costante* » del liquido (o della fase corrispondente), cioè un calore specifico a pressione variabile con la temperatura in guisa da rimanere sempre eguale alla corrispondente tensione del vapore saturo; ma anche la coincidenza numerica approssimata non può ammettersi che a temperature assai lontane dalla critica. Lo scrivente ha avuto difatti occasione di mostrare (2) che, per qualunque fluido, *la differenza fra i valori dei due calori specifici tende a diventare infi-*

(1) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1920.

(2) Nuovo Cimento, 1920, *Sulle trasformazioni isentropiche dei vapori saturi*.

nitamente grande alla temperatura critica; per la CO<sub>2</sub>, ad es., il calcolo mostra che la differenza è già del 30 % a 25° C., temperatura superata durante le trasformazioni che avvengono nelle macchine refrigeranti.

3. Ora la (1), intendendo  $x$  come funzione di  $T$  (lungo la trasformazione), può anche scriversi:

$$(2) \quad \frac{dx}{dT} - x \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dT} \right) + \frac{\gamma_1}{r} = 0$$

E poichè  $r$  e  $\gamma_1$  dipendono solo da  $T$ , e ne dipendono anzi in modo che, per ragioni di origine sperimentale, si può affermare che le espressioni  $\left( \frac{1}{T} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dT} \right)$  e  $\frac{\gamma_1}{r}$  si mantengono continue e finite in tutto il campo di variabilità che interessa, ad eccezione degli estremi (zero assoluto, temp. critica), gli integrali particolari della (2) (*lineare*) godono, fra altro, della seguente proprietà. Siano tracciate, in un piano cartesiano  $x, T$ , le infinite curve come ABCD..., A'B'C'D'..., MN, ... .., integrali particolari della (2); le *punteggiate* che queste curve determinano su ciascuna delle infinite rette, come BMB', CNC', ..., parallele all'asse delle  $x$ , sono *simili* fra di loro; sicchè, ad es., si ha:  $\frac{CN}{BM} = \frac{CC'}{BB'}$ .

Questa proprietà, se si tien conto del significato dei simboli e della via per la quale si giunge alla (1), dà intanto luogo a quello che potremo chiamare brevemente *il principio della proporzionalità delle variazioni di titolo* e che si enuncia: « Se un determinato sistema univariante del tipo qui considerato percorre successivamente più trasformazioni isentropiche, i rapporti fra le differenze dei valori che il titolo assume negli stati (di una qualsiasi coppia di trasformazioni) corrispondenti alle stesse temperature (od alle stesse pressioni) non dipendono dalla particolare coppia di isentropiche considerata ». E questo principio permette, allora, di *risolvere immediatamente e rigorosamente* il problema di *calcolare le variazioni di titolo che avvengono lungo una qualsiasi isentropica* del sistema.

Siano noti, difatti, per mezzo di una tabella o di un grafico, due degli integrali particolari della (2), cioè, ad es., le coordinate (che indicheremo con lettere maiuscole) dei punti delle due curve ABCD..., A'B'C'D'...; e sia noto uno ( $x_M, T_M$ ) degli stati per cui passa una qualsiasi altra isentropica (e che serve appunto ad individuarla). Allorchè, percorrendo questa isentropica, il sistema ha assunto la temperatura  $T_N$ , il titolo corrispondente  $x_N$  sarà dato dalla relazione:

$$(3) \quad x_N = X_C - (X_B - x_M) \cdot \frac{X_C - X_{C'}}{X_B - X_{B'}}$$

il cui calcolo, assai semplice, può essere ancora facilitato ove le tabelle che

definiscono le curve ABCD..., A'B'C'D'... contengano anche le differenze del tipo  $(X_c - X_{c'})$ . Lo scrivente ha preparato queste tabelle per alcuni dei vapori saturi il cui studio è più frequente (acqua,  $SO_2$ ,  $CO_2$ ,  $NH_3$ , ecc.) (1).

4. La (1) si può trasformare in una relazione fra le nuove variabili *volume* ( $v$ ) e *pressione* ( $p$ ), non meno importanti delle altre, ove si faccia uso delle relazioni:

$$(4) \quad v = \sigma + x(s - \sigma)$$

$$(5) \quad T = \varphi(p)$$

nelle quali  $\sigma$  ed  $s$  sono i volumi specifici del liquido e del vapore, o delle fasi corrispondenti (se si trattasse di sistemi di altra natura). Ma se la (4) si presta senz'altro allo scopo, non è così della (5); in quanto la dipendenza, per un medesimo fluido, fra  $T$  e  $p$  è nota solo sotto forma di tabelle (di origine sperimentale) o di relazioni sostanzialmente empiriche (e di forma complicata, per poco che la (5) debba valere in un intervallo di temperatura non troppo ristretto). Queste difficoltà, presentatesi veramente in forma non sempre limpida e precisa, fecero in addietro sorgere il problema di ricercare se gli integrali particolari della (1), trasformata adottando  $v$  e  $p$  come variabili, (una funzione dell'altra), non potevano essere rappresentati *approssimativamente* da espressioni empiriche di tipo semplice; e si giunse a soluzioni (Rankine, Zeuner), largamente usate, delle quali, per altro, lo scrivente ha mostrato, nove anni or sono, il carattere non soddisfacente, derivante da contraddizioni implicite ch'esse contengono; indicando poi, più di recente (2), quale sia il loro campo reale di validità ed in qual modo possa togliersi, senza complicazioni apprezzabili, il grave difetto accennato.

Ma è facile verificare che se, pur mantenendo alla (5) la sua forma puramente simbolica, si fa uso delle (4) e (5) per introdurre nella (2) le nuove variabili  $v$ ,  $p$  e si tien conto che  $s$ ,  $\sigma$ ,  $\gamma_1$ ,  $r$  sono funzioni solo di  $T$ , cioè, nelle nuove variabili, solo di  $p$ , la (2) (considerando  $v$  come funzione di  $p$ ) conserva la sua forma di equazione *lineare*. Anche nelle nuove variabili, dunque, vale la proprietà già segnalata per gli integrali particolari della (2), al pari di un principio (che potremo dire brevemente della *proporzionalità delle variazioni di volume*) il quale si enuncia: « Se un determinato sistema univariante del tipo qui considerato percorre successivamente più trasformazioni isentropiche, i rapporti fra le differenze dei valori che il volume assume negli stati (di una qualsiasi coppia di trasformazioni) corrispondenti alle stesse pressioni (od alle stesse temperature) non dipendono dalla particolare coppia di isentropiche considerata ». E nello stesso modo già accen-

(1) Esse vengono qui omesse per ovvie ragioni di spazio; ma saranno senz'altro inviate, al pari di quelle di cui nel § 4, a chi voglia richiederle (al Lab. di Fisica Tecnica della R. Scuola per gli Ingegneri di Roma).

(2) Nuovo Cimento, 1920, loc. cit.

nato (§ 3), questo principio permette di risolvere, facilmente e rigorosamente, il problema di calcolare le variazioni di volume che avvengono lungo trasformazioni isentropiche, mediante l'impiego di una relazione del tipo:

$$(6) \quad v_N = V_c - (V_B - v_M) \cdot \frac{V_c - V_{c'}}{V_B - V_{B'}}$$

analoga alla (3) tanto come forma quanto come origine, giustificazione ed impiego. Per ogni determinato sistema, basterà conoscere come varii il volume in funzione della temperatura (o della pressione) lungo due isentropiche quali che siano ABCD..., A'B'C'D'...; sarà ovviamente sufficiente limitarsi a considerare l'unità di massa del sistema. Lo scrivente ha già calcolato le tabelle occorrenti per l'applicazione della (6) ai vapori che d'ordinario più interessano (acqua, CO<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub>, NH<sub>3</sub>....) (1).

Geometria. — *Le superficie proiettivamente applicabili.* Nota di LINDA STIPA, presentata dal Corrisp. G. FUBINI (2).

Il problema della deformazione proiettiva delle ipersuperficie è stato dal prof. Fubini ridotto al problema analogo per le superficie (3). Questo si riduce (4) a trovare, date  $\beta$  e  $\gamma$  come funzioni di  $u, v$ , le eventuali soluzioni del sistema:

$$(1) \quad \begin{cases} L'_v = -(2\beta\gamma'_u + \gamma\beta'_u) & , \quad M'_u = -(2\gamma\beta'_v + \beta\gamma'_v) \\ \beta M'_v + 2M\beta'_v + \beta'''_{vv} = \gamma L'_u + 2L\gamma'_u + \gamma'''_{uu} \end{cases}$$

Ad ogni soluzione di questo sistema corrisponde una superficie, per cui le linee di Darboux-Segre sono definite dalla  $\beta du^2 + \gamma dv^2 = 0$ , e per cui le  $u, v$  sono assintotiche.

Se  $L = L_i$ ,  $M = M_i$  ( $i = 1, 2$ ) sono due sistemi di soluzioni di (1), le corrispondenti superficie sono proiettivamente applicabili; e, posto

$$\lambda = L_1 - L_2 \quad , \quad \mu = M_1 - M_2,$$

la forma  $\lambda du^2 + \mu dv^2$  ha significato *intrinseco*; e le  $\lambda, \mu$  soddisfano alle

$$(2) \quad \lambda'_v = \mu'_u = 0 \quad ; \quad \beta\mu'_v + 2\mu\beta'_v = \gamma\lambda'_u + 2\lambda\gamma'_u.$$

(1). Come già le altre, anche queste tabelle, che vengono qui omesse per ragioni di spazio, verranno senz'altro inviate a chi voglia richiederle (al Lab. di Fisica Tecnica della R. Scuola per gli Ingegneri di Roma).

(2). Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1920.

(3). E. Cartan si è occupato recentemente dello stesso problema per altra via (Comptes Rendus, 1920, 1° sem., fasc. 24).

(4). Fubini, *Fondam. di geom. proiett. differenz. di una superf.* (questi Rend. 1918, pag. 47).