ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

nato (§ 3), questo principio permette di risolvere, facilmente e rigorosamente, il problema di calcolare le variazioni di volume che avvengono lungo trasformazioni isentropiche, mediante l'impiego di una relazione del tipo:

$$(6) \qquad v_N = V_C - (V_B - v_M) \cdot \frac{V_C - V_{C'}}{V_B - V_{B'}}$$

analoga alla (3) tanto come forma quanto come origine, giustificazione ed impiego. Per ogni determinato sistema, basterà conoscere come varii il volume in funzione della temperatura (o della pressione) lungo due isentropiche quali che siano ABCD..., A'B'C'D'...; sarà ovviamente sufficiente limitarsi a considerare l'unità di massa del sistema. Lo scrivente ha già calcolato le tabelle occorrenti per l'applicazione della (6) ai vapori che d'ordinario più interessano (acqua, CO_2, SO_2, NH_3, ...) (¹).

Geometria. — *Le superficie proiettivamente applicabili.* Nota di LINDA STIPA, presentata dal Corrisp. G. FUBINI (²).

Il problema della deformazione proiettiva delle ipersuperficie è stato dal prof. Fubini ridotto al problema analogo per le superficie (³). Questo si riduce (⁴) a trovare, date β e γ come funzioni di u, v, le eventuali soluzioni del sistema:

$$(1) \qquad \begin{cases} L'_v = -(2\beta\gamma'_u + \gamma\beta'_u) \;, \quad M'_u = -(2\gamma\beta'_v + \beta\gamma'_v) \,, \\ \beta M'_v + 2M\beta'_v + \beta'''_{vvv} = \gamma L'_u + 2L\gamma'_u + \gamma'''_{uuu} \,. \end{cases}$$

Ad ogni soluzione di questo sistema corrisponde una superficie, per cui le linee di Darboux-Segre sono definite dalla $\beta du^3 + \gamma dv^3 = 0$, e per cui le u, v sono assintotiche.

Se $L = L_i$, $M = M_i$ $(i = 1, 2)$ sono due sistemi di soluzioni di (1), le corrispondenti superficie sono proiettivamente applicabili; e, posto

$$\lambda = L_1 - L_2 \;, \quad \mu = M_1 - M_2 \,,$$

la forma $\lambda du^2 + \mu dv^2$ ha significato *intrinseco*; e le λ, μ soddisfano alle

$$(2) \qquad \lambda'_v = \mu'_u = 0 \quad ; \quad \beta\mu'_v + 2\mu\beta'_v = \gamma\lambda'_u + 2\lambda\gamma'_u \,.$$

(¹) Come già le altre, anche queste tabelle, che vengono qui omesse per ragioni di spazio, verranno senz'altro inviate a chi voglia richiederle (al Lab. di Fisica Tecnica della R. Scuola per gli Ingegneri di Roma).

(²) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1920.

(³) E. Cartan si è occupato recentemente dello stesso problema per altra via (Comptes Rendus, 1920, 1° sem., fasc. 24).

(⁴) Fubini, *Fondam. di geom. proiett. differenz. di una superf.* (questi Rend. 1918, pag. 47).

Se una delle λ, μ è uguale a zero, potremo, permutando, caso mai, u con v supporre $\mu = 0$ e scegliere poi il parametro delle u in guisa che $\lambda = 1$ (la forma $\lambda\, du^2 + \mu\, dv^2$ ha significato intrinseco e per (2) λ è funzione della sola u). Se $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, potremo in modo simile rendere $\lambda = \mu = 1$.

I caso: $\lambda = 1$, $\mu = 0$. Le (2) dànno $\gamma'_u = 0$; prescindendo dalle rigate (caso più facile), e quindi supponendo $\gamma \neq 0$, potremo cambiare il parametro delle v in guisa che $\gamma = 1$. La 2ª delle (1) prova potersi porre: $M = \varphi'_v$, $-2\beta = \varphi'_u$, essendo φ funzione delle u, v. La condizione di integrabilità delle altre due equazioni nella L dà che φ deve soddisfare alla

$$(3) \qquad \varphi'''_{uuu} + \frac{\partial}{\partial v}(\varphi'_u \varphi''_{vv} + 2\varphi'_v \varphi''_{uv} + \varphi''''_{uvvv}) = 0\,.$$

Date $\gamma = 1$ e $\beta = -\frac{1}{2}\varphi'_u$, la φ non è determinata; ad essa potremo sostituire la $\psi = \varphi + W$, ove W è funzione arbitraria di v; ma, poichè anche la ψ dovrà soddisfare a (3), sarà, posto $V = W'$:

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial v}(\varphi'_u V' + 2\varphi''_{uv} V) = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}(\varphi V' + 2\varphi'_v V) = 0\,.$$

La soluzione più generale della seconda delle (1) sarà:

$$M = \varphi'_v + V\,.$$

E la L si otterrà dalle altre (1) con integrazione, e cioè con *una nuova costante additiva* arbitraria. Se dunque la V soddisfacente a (4) dipende da h costanti arbitrarie, otterremo ∞^{h+1} superficie tra loro applicabili. Sarà $h = 0$, se la (4) ammette come unica soluzione $V = 0$; in ogni altro caso è $h \leq 2$, perchè la (4) è del secondo ordine in V [1]. La ricerca delle funzioni φ soddisfacenti a (3) per cui la (4) è risolubile con $V \neq 0$ si riduce a un facile calcolo, che la brevità dello spazio mi vieta di riprodurre. Noterò solo che, posto $\frac{1}{\sqrt{V}} = V'_1$, la (4) si può scrivere:

$$\left(\varphi \sqrt{V}\right)'_v = U_1 V'_1 + V'_2\,,$$

$$\varphi = (U_1 V_1 + V_2 + U_2)\, V'_1 \quad , \quad \beta = -\tfrac{1}{2}(U'_1 V_1 V'_1 + U'_2 V'_1)$$

ove U_1, U_2 sono funzioni della sola u, V_1 e V_2 della sola v.

II caso: $\lambda = \mu = 1$. In tal caso le (2) dànno: $\beta = f'_u$, $\gamma = f'_v$ ove la f è una funzione delle u, v, che è determinata (a meno di una inessenziale costante additiva), appena siano date le β, γ. La f naturalmente deve soddisfare alla condizione della risolubilità delle (1). Se per questi valori

[1] Tale equazione non può ridursi a identità, perchè. se escludiamo le rigate, è $\beta \neq 0$, e quindi $\varphi'_u \neq 0$.

di β, γ le (2) ammettono la sola soluzione $\lambda = \mu = \text{cost.}$, le L, M definite da (1) dipenderanno da una sola costante arbitraria; e corrispondentemente avremo ∞^1 superficie proiettivamente applicabili. Se così non è, allora da (2) si deduce:

$$(5) \qquad \lambda = \mathrm{U}\,,\ \mu = \mathrm{V} \quad ; \quad f'_u \mathrm{V}' + 2 f''_{uv} (\mathrm{V} - \mathrm{U}) - f'_v \mathrm{U}' = 0$$

dove U è funzione della sola u, V della v. Il caso *che*

$$0 = \frac{\partial^2 \log f'_u}{\partial u \, \partial v} = \frac{\partial^2 \log f'_v}{\partial u \, \partial v} = 0$$

si deve studiare a parte [1]. Se $(\log f'_u)''_{uv}$ è p. es. differente da zero, cioè se $f''_{uu} f''_{uv} - f'_u f'''_{uuv} \neq 0$, dall'ultima delle (5) e dall'equazione che se ne trae, derivando rispetto ad u, si deduce facilmente:

$$\mathrm{V} = \mathrm{U} + \frac{(f'_v f''_{uu} - 3 f'_u f''_{uv})\, \mathrm{U}' - f'_u f'_v \mathrm{U}''}{2(f''_{uu} f''_{uv} - f'_u f'''_{uuv})}$$

che, sostituito nell'ultima delle (5), dà un'equazione lineare omogenea del primo ordine per la U'. Dunque le U, V dipendono al massimo da due costanti arbitrarie, e vi saranno al più ∞^2 superficie proiettivamente applicabili. Lo studio completo, che deve tener conto delle condizioni enunciate più sopra per la f, è lungo, ma non offre più difficoltà fondamentali.

E, senza ulteriore sviluppo di calcoli, noi siamo già in grado di trovare le eventuali superficie applicabili su una superficie data di questo secondo tipo.

[1] Questo studio si può evitare nel modo seguente. Nel caso qui escluso sia $\beta = f_u$ che $\gamma = f_v$ sono prodotti di una funzione della u per una funzione della v. Potremo cambiare i parametri u, v in guisa che l'una o l'altra delle β, γ valga 1; e siamo così ricondotti al I° caso.