ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Matematica. — *Sulla varietà degli spazî tangenti a una data varietà.* Nota I di Alessandro Terracini, presentata dal Socio C. Segre [1].

In varie ricerche di geometria proiettiva differenziale, insieme con una varietà di k dimensioni, V_k, fu introdotta la varietà W formata dai suoi S_k tangenti [2]. Così, fu considerato il problema dell'abbassamento di dimensione che può presentare la varietà W, rispetto al valore $2k$ che le compete in generale (per varietà immerse in spazî sufficientemente elevati), problema che fu completamente risolto per le varietà a non più di quattro dimensioni [3]. Una nuova questione relativa a certe altre particolarità che può, per particolari V_k, presentare la varietà W, viene studiata in questo lavoro.

1. Supporremo che la varietà V_k sia immersa in uno S_r con $r > 2k$ [4], e che la varietà W abbia dimensione $2k$ (cosicchè escludiamo dalle nostre considerazioni quelle particolari V_k a cui abbiamo or ora accennato). Allora, si riconosce senza difficoltà che, per una V_k generica, la W_{2k} è toccata da uno stesso S_{2k} nei punti di ogni retta tangente alla V_k [5]; gli S_{2k} tangenti alla W_{2k} nei singoli punti di un suo S_k generatore (vale a dire nei singoli punti di uno S_k tangente a V_k) sono dunque ∞^{k-1}, o meno, anzichè ∞^k; anzi, in generale, sono proprio ∞^{k-1}. D'altra parte, quegli S_{2k} tangenti nei singoli punti di uno S_k tangente di V_k coincidono addirittura tutti quanti

[1] Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1920.

[2] Per la prima volta, se non erro, con qualche diffusione, nei lavori del prof. Segre: a) *Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLII (1907); b) *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, Rend. del Circolo matematico di Palermo, tomo XXX (1910).

[3] Nelle mie Note: *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, Nota I (vol. XLIX, 1913); Nota II (vol. LI, 1916); Nota III (vol. LX, 1920); ved. particolarmente la Nota II. — Alcune V_k con varietà W di dimensione $< 2k$ furono considerate anche dal Bompiani, *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLIX (1913).

[4] Per $r < 2k$ la varietà W ha dimensione $< 2k$; e per $r = 2k$, se la W non ha dimensione $< 2k$, essa coincide collo spazio ambiente, cosicchè il problema che stiamo per porre perde ogni interesse.

[5] Cfr. Segre, op. cit.: *a*), n.i 24-26; e *b*), n. 20.

fra loro, quando la V_k rappresenta $\frac{k(k-1)}{2}$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti [1]; e viceversa (sempre quando si escludano, come si è detto, le V_k per cui la W ha dimensione $< 2k$). Infatti, stabilito un sistema di coordinate proiettive omogenee, se x è un punto (di coordinate $x_0, x_1, \dots, x_r$), funzione di k parametri essenziali $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, che descrive la V_k, e

$$(1) \qquad y = x + \sum_i \lambda_i x^{(i)}$$

un punto generico dello S_k tangente in x alla V_k (dove, come nel seguito, sottintendiamo che l'indice i della sommatoria varii da 1 a k, e poniamo $x^{(1)} = \frac{\partial x}{\partial \tau_1}$, ecc.), lo S_{2k} ξ tangente in y alla W_{2k} è determinato dai punti

$$(2) \qquad x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \sum_i \lambda_i x^{(i1)}, \sum_i \lambda_i x^{(i2)}, \dots, \sum_i \lambda_i x^{(ik)}.$$

Da ciò emerge senz'altro che, se la V_k rappresenta $\frac{k(k-1)}{2}$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti, vale a dire ha, nel punto generico x, uno S_{2k} osculatore, questo S_{2k} contiene i punti (2), e perciò, quali che siano i valori che si attribuiscono alle λ, coincide con ξ; e, viceversa, che, se i punti (2) stanno in uno stesso S_{2k}, quali che siano i valori delle λ, tale S_{2k} contiene il punto x e tutti i suoi derivati primi e secondi, ed è pertanto osculatore alla V_k in x.

Per $k = 2$, non sono possibili altri casi, diversi dai due ora accennati; *ma, per* $k > 2$, *si potranno avere delle* V_k *che si comportino in modo*, per così dire, *intermedio, rispetto a quei due*. Si potranno cioè avere delle V_k tali che, entro ogni loro S_k tangente generico, gli spazî, γ, di contatto della W_{2k} coi singoli suoi S_{2k} tangenti abbiano dimensione g con $1 < g < k$. Appunto la ricerca di tali particolari V_k viene iniziata in questo lavoro per i primi valori di k.

2. Se il punto (1) e il punto $x + \sum_i \mu_i x^{(i)}$ sono due punti generici situati entro un medesimo spazio γ, la proprietà che abbiamo supposta per la V_k si traduce in questa, che i punti

$$(3) \qquad \sum_i \mu_i x^{(ij)} \qquad (j = 1, 2, \dots k)$$

stanno nello S_{2k} dei punti (2). Scrivendo che ciò avviene, si avranno per x delle equazioni di Laplace, tra le quali non potranno esservene che $m < \frac{k(k-1)}{2}$ linearmente indipendenti (ved. il num. precedente).

[1] Cfr. Segre, op. cit.: *b*), n. 21.

Per semplificare il linguaggio, introduciamo, in relazione col sistema di equazioni di Laplace rappresentato dalla V_k, il sistema lineare Σ delle *quadriche* ad esso *associate* [1]: sono le quadriche di uno spazio S_{k-1}, dove si fissi un sistema di coordinate proiettive omogenee $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, rappresentate dalle equazioni che si ottengono annullando le *forme quadratiche associate* a quelle equazioni di Laplace, cioè ricavate da esse trascurando i termini in x e nelle sue derivate prime, e sostituendo le derivate seconde $x^{(ij)}$ coi prodotti $\theta_i \theta_j$ $(i, j = 1, 2, \dots k)$. E, finalmente, indichiamo per brevità le $\sum_1 \lambda_i \theta_i$, $\sum_1 \mu_i \theta_i$, ecc., rispettivamente con λ, μ, ecc.

Allora, se al punto (1) (e a tutti quelli della retta che lo proietta da x) si fa corrispondere nello $S_{k-1}[\theta]$ l'iperpiano $\lambda = 0$, ai punti di uno spazio γ corrisponderanno in $[\theta]$ gli iperpiani per uno spazio σ di dimensione $k - g - 1$; e alla totalità degli spazî γ corrisponderà una totalità Γ, ∞^{k-g}, di σ_{k-g-1}, tale che in un iperpiano generico di $[\theta]$ ne giaccia uno.

Le equazioni di Laplace, di cui prima si è detto, avranno per associate le quadriche di equazione

$$\theta_i \mu + m_i \lambda = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots k) \tag{4}$$

dove le m_i sono convenienti forme lineari (eventualmente evanescenti) nelle θ. Si chiami, per un momento, Σ_1 il (minimo) sistema lineare cui appartengono le (4) per una λ fissata, e variando la μ (in modo, naturalmente, che $\mu = 0$ passi per lo σ_{k-g-1} di $\lambda = 0$), e Σ' la sezione di Σ_1 con $\lambda = 0$. In Σ_1, che è contenuto in Σ, non vi è nessuna quadrica passante per $\lambda = 0$ [se no, l'equazione di Laplace, di cui questa sarebbe la quadrica associata, esprimerebbe che i punti (2) non sarebbero linearmente indipendenti, e perciò la varietà W avrebbe, contro l'ipotesi, dimensione $< 2k$]; cosicchè Σ_1 e Σ' hanno notoriamente la medesima dimensione. Ora, le quadriche di Σ' contengono tutte lo σ_{k-g-1} di $\lambda = 0$, e inoltre fa evidentemente parte di Σ' ogni quadrica costituita da uno S_{k-3} generico insieme con uno S_{k-3} qualunque per σ_{k-g-1}: perciò Σ' coincide col sistema lineare, di dimensione

$$\varDelta = \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(k-g+1)(k-g)}{2} - 1, \tag{5}$$

costituito dalle quadriche di $\lambda = 0$ passanti per σ_{k-g-1}. Tale sarà adunque la dimensione di Σ_1; quindi si avrà intanto

$$\frac{k(k-1)}{2} > m \geq \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(k-g+1)(k-g)}{2}. \tag{6}$$

Di più, per σ_{k-g-1} passa bensì un sistema lineare di quadriche, contenuto in Σ, la cui dimensione è $\varDelta$ (il sistema Σ_1), ma non un sistema più

[1] Cfr. il n. 2 della I fra le mie Note citate.

ampio, perchè, nella ipotesi contraria, entro questo sistema vi sarebbero delle quadriche distinte che produrrebbero su $\lambda = 0$ una medesima sezione; e questo implicherebbe l'appartenenza di $\lambda = 0$ a qualche quadrica di Σ, ciò che abbiamo già visto doversi escludere. Viceversa, si supponga che il sistema Σ sia dotato delle proprietà che abbiamo finora trovate come *necessarie*, e siano $\lambda = 0$ e $\mu = 0$ due S_{k-2} generici secantisi in uno σ_{k-g-1} di Γ. Allora, se la qnadrica $\theta_i \mu = 0$ sta in Σ, questo sistema contiene la quadrica (4) dove si supponga m_i evanescente; se no, quella quadrica e il sistema lineare Σ_1 delle quadriche di Σ passanti per σ_{k-g-1} determinano un sistema lineare, avente ancora per base σ_{k-g-1}, la cui dimensione è $\varDelta + 1$; e poichè la sezione di questo sistema con $\lambda = 0$ ha invece dimensione $\varDelta$, si trae che in esso sistema vi è una quadrica contenente come parte $\lambda = 0$: quindi si arriva ancora a concludere l'esistenza, entro Σ, di una quadrica avente per equazione la (4).

Possiamo quindi concludere:

Le V_k per le quali, entro ogni loro S_k tangente generico, gli spazî di contatto della varietà W_{2k} coi suoi singoli S_{2k} tangenti hanno dimensione g $(1 < g < k)$ sono, tutte e sole, le V_k rappresentanti un sistema di m equazioni di Laplace linearmente indipendenti, con

$$(6) \qquad \frac{k(k-1)}{2} > m \geq \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(k-g+1)(k-g)}{2}$$

tale che, nello spazio S_{k-1} delle quadriche associate, esista un sistema Γ, ∞^{k-g}, di spazî σ_{k-g-1} dotato delle seguenti proprietà:

1) *in un iperpiano generico di S_{k-1} giace uno e un solo σ_{k-g-1} di Γ;*

2) *per uno σ_{k-g-1} generico di Γ passa un sistema lineare di quadriche, contenuto entro quello, Σ, delle quadriche associate, di dimensione*

$$(5) \qquad \varDelta = \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(k-g+1)(k-g)}{2} - 1;$$

ma non esiste un analogo sistema di spazî σ aventi dimensione $< k-g-1$; nè esistono quadriche di Σ contenenti un iperpiano arbitrario.

3. La determinazione delle V_k che stiamo indagando si potrà quindi fare risolvendo successivamente questi due problemi:

A) trovare tutti i sistemi di quadriche che soddisfanno alle condizioni ora enunciate;

B) assegnare le soluzioni (o almeno un certo numero di soluzioni linearmente indipendenti) dei sistemi di equazioni di Laplace, le cui quadriche associate costituiscono un sistema di quelli trovati in *A*).

Per $k = 3$, il solo caso possibile è quello di $g = 2$; per esso, anzi, più in generale, per k qualunque (purchè > 2) e $g = k - 1$, il problema *A*) si risolve senz'altro e si trova così:

Le V_k $(k > 2)$ *per le quali, entro ogni loro* S_k *tangente generico, gli spazi di contatto della varietà* W_{2k} *coi suoi singoli* S_{2k} *tangenti hanno dimensione* $k-1$, *sono, tutte e sole, le* V_k *rappresentanti un sistema di* $\frac{k(k-1)}{2}-1$ *equazioni di Laplace linearmente indipendenti, le cui quadriche associate passano per una retta, senza formare però un sistema entro cui vi siano quadriche contenenti un iperpiano arbitrario* (¹).

Matematica. — *Sviluppo degli integrali di un'equazione differenziale in serie di integrali definiti.* Nota di FRANCESCO TRICOMI, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO (²).

1. Sia

$$f[y, y', y'', \dots y^{(n)}, x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots \varphi^{(m)}(x)] = 0 \tag{1}$$

un'equazione differenziale di ordine n, contenente, a guisa di parametro, la funzione $\varphi(x)$ e le sue derivate sino all'ordine m. È chiaro che i valori che un determinato integrale particolare y di essa riceve in un intervallo (a, b) dipendono da tutti i valori assunti in questo da $\varphi(x)$ e dalle sue prime m derivate; in altri termini *la linea* $[y]$ *è una funzione* $F([\varphi])$ *della linea* $[\varphi]$.

Il Volterra (³) ha mostrato come, riuscendo ad integrare una certa equazione differenziale lineare di n^{esimo} ordine, sia possibile calcolare le *derivate* dei varî ordini di questa funzione $F([\varphi])$, la quale però, in generale, non appartiene alla classe di quelle sviluppabili in *serie di Taylor generalizzata*, presentando dei *punti eccezionali*.

Se però $m = 0$, cioè se nell'equazione figura solo $\varphi(x)$ e non le sue derivate

$$f[y, y', y'', \dots y^{(n)}, x, \varphi(x)] = 0, \tag{2}$$

questa difficoltà non si presenta più ed $[y]$, almeno in un certo campo,

(¹) Per $k = 3$, questa limitazione è ovviamente superflua. Ma non sempre: per es., per $k = 4$, essa conduce a escludere i sistemi Σ costituiti da ∞^4 quadriche (di S_3) che segano un piano fisso in una stessa coppia di rette (eventualmente coincidenti); *e non altri*, come si rileva dalla considerazione, che il non essere soddisfatta quella limitazione equivale all'essere indeterminata la jacobiana del sistema lineare ∞^4 di quadriche, duale del sistema apolare a Σ, ciò che può solo avvenire nel caso indicato (cfr. Toeplitz, *Ueber Systeme von Formen deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet*. Breslau, 1905).

(²) Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1920.

(³) V. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes* (Paris, Gauthier-Villars, 1913), pag. 30 e seg.