ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Le V_k $(k > 2)$ *per le quali, entro ogni loro* S_k *tangente generico, gli spazi di contatto della varietà* W_{2k} *coi suoi singoli* S_{2k} *tangenti hanno dimensione* $k-1$, *sono, tutte e sole, le* V_k *rappresentanti un sistema di* $\frac{k(k-1)}{2}-1$ *equazioni di Laplace linearmente indipendenti, le cui quadriche associate passano per una retta, senza formare però un sistema entro cui vi siano quadriche contenenti un iperpiano arbitrario* (¹).

Matematica. — *Sviluppo degli integrali di un'equazione differenziale in serie di integrali definiti.* Nota di FRANCESCO TRICOMI, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO (²).

1. Sia

$$f[y, y', y'', \dots y^{(n)}, x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots \varphi^{(m)}(x)] = 0 \tag{1}$$

un'equazione differenziale di ordine n, contenente, a guisa di parametro, la funzione $\varphi(x)$ e le sue derivate sino all'ordine m. È chiaro che i valori che un determinato integrale particolare y di essa riceve in un intervallo (a, b) dipendono da tutti i valori assunti in questo da $\varphi(x)$ e dalle sue prime m derivate; in altri termini *la linea* $[y]$ *è una funzione* $F([\varphi])$ *della linea* $[\varphi]$.

Il Volterra (³) ha mostrato come, riuscendo ad integrare una certa equazione differenziale lineare di n^{esimo} ordine, sia possibile calcolare le *derivate* dei varî ordini di questa funzione $F([\varphi])$, la quale però, in generale, non appartiene alla classe di quelle sviluppabili in *serie di Taylor generalizzata*, presentando dei *punti eccezionali*.

Se però $m = 0$, cioè se nell'equazione figura solo $\varphi(x)$ e non le sue derivate

$$f[y, y', y'', \dots y^{(n)}, x, \varphi(x)] = 0, \tag{2}$$

questa difficoltà non si presenta più ed $[y]$, almeno in un certo campo,

(¹) Per $k = 3$, questa limitazione è ovviamente superflua. Ma non sempre: per es., per $k = 4$, essa conduce a escludere i sistemi Σ costituiti da ∞^4 quadriche (di S_3) che segano un piano fisso in una stessa coppia di rette (eventualmente coincidenti); *e non altri*, come si rileva dalla considerazione, che il non essere soddisfatta quella limitazione equivale all'essere indeterminata la jacobiana del sistema lineare ∞^4 di quadriche, duale del sistema apolare a Σ, ciò che può solo avvenire nel caso indicato (cfr. Toeplitz, *Ueber Systeme von Formen deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet*. Breslau, 1905).

(²) Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1920.

(³) V. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes* (Paris, Gauthier-Villars, 1913), pag. 30 e seg.

sarà sviluppabile in *serie di potenze* di $[\varphi]$ [1], cioè sarà una *funzione analitica* di questa linea. In altre parole possono ottenersi degli sviluppi degli integrali della (2) in serie di integrali definiti, validi nell'*intorno* di un *valore* assegnato della funzione $\varphi(x)$, p. es. $\varphi(x)=0$.

Nella presente Nota considererò il caso che la (2) sia un'equazione lineare di 2° ordine e si assuma come $\varphi(x)$ il coefficiente della y, caso nel quale gli sviluppi in discorso si presentano sotto una forma molto semplice. Le formule che così stabilirò sono interessanti specialmente pel fatto che, sotto certe condizioni, esse restano valide anche se l'equazione presenti delle singolarità non rientranti nel caso di Fuchs, cioè sia un'equazione ad integrale generale irregolare, come quelle studiate dal Thomè.

2. Sia dunque l'equazione

$$y''+p(x)\,y'+\varphi(x)\,y=0\,, \tag{3}$$

dove $p(x)$ è una funzione definita nell'intervallo $(0\,,a)$ nel quale, pel momento, supporremo non presenti alcuna singolarità. Siano $y_1^0(x)$ ed $y_2^0(x)$ due integrali linearmente indipendenti dell'equazione

$$y''+p(x)\,y'=0 \tag{4}$$

ottenuta ponendo nella (3) $\varphi(x)=0$, e sia $W(x)$ il loro Wronskiano. Applicando una formula del Volterra [2] si trova immediatamente che la derivata n^{esima} di $[y]$ rispetto a $[\varphi]$ e ai punti $\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n$, $(\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n)$ dell'intervallo $(0,a)$, per $[\varphi]=[0]$, *è nulla se* $x\leq\xi_n$ mentre, *se* $x>\xi_n$, è data dalla formula

$$\left[\frac{\partial^n[y]}{\partial^n[\varphi]\,(\xi_1,\ldots\xi_n)}\right]_{[\varphi]=[0]}(x)= \tag{5}$$

$$=\{c_1\,y_1^0(\xi_1)+c_2\,y_2^0(\xi_1)\}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{W(\xi_i)}\begin{vmatrix} y_1^0(\xi_{i+1}) & y_2^0(\xi_{i+1})\\ y_1^0(\xi_i) & y_2^0(\xi_i)\end{vmatrix}$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti dipendenti dai valori iniziali che individuano l'integrale $[y]$ e, per comodità di notazione, si è posto $x=\xi_{n+1}$.

Per la formula di Taylor generalizzata avremo dunque, con facili trasformazioni, *almeno formalmente*

$$y(x)=c_1+c_2\,P(x)+ \tag{6}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^x d\xi_n\int_0^{\xi_n}d\xi_{n-1}\cdots\int_0^{\xi_2}\{c_1+c_2\,P(\xi_1)\}\,d\xi_1\prod_{i=1}^{n}\frac{P(\xi_{i+1})-P(\xi_i)}{P'(\xi_i)}\,\varphi(\xi_i),$$

[1] Cfr. F. Tricomi, *Le serie di potenze nel campo delle funzioni di linee* (Rend. Accad. Sc. fis. mat. di Napoli, serie 3ª, vol. 26, 1920).

[2] Loc. cit., prima formula della pag. 33.

avendo osservato che due integrali linearmente indipendenti dalla (4) sono evidentemente

$$y_1^0 = 1 \quad , \quad y_2^0 = \mathrm{P}(x)$$

dove

$$\mathrm{P}'(x) = e^{-\int_0^x p(u)\,du} \quad , \quad \mathrm{P}(x) = \int_0^x \mathrm{P}'(u)\,du \,. \tag{7}$$

3. Mostriamo ora come la soluzione trovata non sia solo formale ma bensì effettiva e rappresenti inoltre, ove le c_1 e c_2 si riguardino costanti arbitrarie, l'integrale generale della (3).

All'uopo osserviamo anzitutto come, indicando con ξ_i' un opportuno punto compreso fra ξ_i e ξ_{i+1}, $(i = 1, 2, \dots n)$, la (6) possa scriversi

$$y(x) = c_1 + c_2\,\mathrm{P}(x) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^x d\xi_n \int_0^{\xi_n} d\xi_{n-1} \cdots \int_0^{\xi_2} \{c_1 + c_2\,\mathrm{P}(\xi_1)\}\, d\xi_1 \prod_{i=1}^{n} (\xi_{i+1} - \xi_i)\, \frac{\mathrm{P}'(\xi_i')}{\mathrm{P}'(\xi_i)}\, \varphi(\xi_i),$$

da cui, indicando con z il *modulo* della linea $[\varphi]$ ed osservando che, come è facile vedere,

$$(x - \xi_n)(\xi_n - \xi_{n-1}) \dots (\xi_2 - \xi_1) \leqq (x - \xi_1)^n / n^n < a^n / n^n \leqq a^n / n!\,,$$

si trae

$$|y(x)| < |c_1| + |c_2|\,|\mathrm{P}(x)| + \tag{8}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!} \int_0^x d\xi_n \int_0^{\xi_n} d\xi_{n-1} \cdots \int_0^{\xi_2} \{|c_1| + |c_2|\,|\mathrm{P}(x)|\}\, d\xi_1 \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{P}'(\xi_i')}{\mathrm{P}'(\xi_i)}\,.$$

Avendo supposto che $p(x)$ non presenti alcuna singolarità in $(0, a)$, esisterà un numero fisso M tale che sia sempre $|p(x)| < \mathrm{M}$ e quindi

$$e^{-\mathrm{M}a} < \mathrm{P}'(x) < e^{\mathrm{M}a} \quad , \quad a e^{-\mathrm{M}a} < \mathrm{P}(x) < a e^{\mathrm{M}a}\,.$$

Pertanto, ponendo per brevità $|c_1| + |c_2|\, a e^{\mathrm{M}a} = \mathrm{C}$, dalla (8) potrà ricavarsi

$$|y(x)| < \mathrm{C} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!}\, \mathrm{C}\, e^{2n\mathrm{M}a} \int_0^x d\xi_n \int_0^{\xi_n} d\xi_{n-1} \dots \int_0^{\xi_2} d\xi_1\,,$$

da cui, *a fortiori*,

$$|y(x)| < \mathrm{C} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!}\, \mathrm{C}\, e^{2n\mathrm{M}a}\, a^n = \mathrm{C}\, e^{a^2 e^{2\mathrm{M}a} z}\,,$$

il che mostra che, se $\varphi(x)$ si conserva sempre limitata, cosa che supporremo sempre, *la serie* (6) *è assolutamente ed uniformemente convergente.*

Ricavando dalla (6), con la derivazione termine a termine, i valori di y' ed y'', è agevole verificare direttamente che quella serie soddisfa effettivamente la (3).

Inoltre dico che se si riguardano c_1 e c_2 come costanti arbitrarie, la (6) è l'integrale generale dell'equazione (3).

Infatti, sia $J([\varphi])(x)$ il determinante funzionale di y ed y' rispetto a c_1 e c_2. Si vede immediatamente che per $[\varphi]=[0]$ si ha

$$J([0])(x)=P'(x)\neq 0\,;$$

ma $J([\varphi])$ è manifestamente una funzione continua di $[\varphi]$ ([1]), dunque, almeno in un certo intorno di $[\varphi]=[0]$, dovrà essere $J([\varphi])(x)\neq 0$, il che prova l'asserto.

4. Consideriamo ora il caso in cui $p(x)$ presenti nell'intervallo $(0\,,a)$ un numero finito di punti singolari; anzi, poichè ciò può farsi evidentemente senza diminuzione di generalità, supponiamo che $p(x)$ divenga infinita soltanto nell'estremo di destra dell'intervallo. L'ipotesi restrittiva che introdurremo è che $p(x)$, *al tendere di* x *ad* a, *si conservi, da un certo* α *in poi, sempre positiva,* ma l'ordine del polo o anche l'essere a eventualmente un punto singolare essenziale, è indifferente.

Per semplicità supporremo che sia $\alpha\leq 0$, chè, se così non fosse, spezzeremmo l'intervallo $(0\,,a)$ nei due $(0\,,\alpha)$ e $(\alpha\,,a)$, nel primo dei quali $p(x)$ sarebbe sempre limitata, mentre l'altro si troverebbe nelle condizioni suaccennate.

Essendo $p(x)>0$, la prima delle (7) mostra che $P'(x)$ è una funzione sempre *decrescente* al crescere di x, sicchè si avrà, da una parte,

$$P'(\xi_i')/P'(\xi_i)<1\,,\quad (i=1\,,2\,,\ldots n),$$

e dall'altra

$$P(x)<\int_0^x P'(0)\,dx\leq P'(0)\,a\,.$$

Pertanto, ponendo per brevità $|c_1|+|c_2|\,a\,P'(0)=C'$, dalla (8) potrà trarsi

$$|y(x)|<C'+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(az)^n}{n!}\,C'\,a^n=C'\,e^{a^2z}\,,$$

il che mostra che, anche in queste nuove ipotesi, *la serie* (6) *converge assolutamente ed uniformemente in tutto l'intervallo* $(0\,,a)$, *estremo destro incluso.*

Se $p(x)$ ha in a un polo di ordine superiore al primo, il risultato trovato sembra a prima vista in contradizione col teorema fondamentale del Thomè ([2]) che in questo caso, essendo l' unità l'*indice caratteristico* della equazione (3), ci dice non potere esistere più di *un* integrale linearmente indipendente regolare per $x=a$.

Questa difficoltà si toglie però facilmente osservando che, nel caso in esame, si ha manifestamente $P'(a)=0$, il che, come è facile vedere, implica che pure $J(a)$ deve essere zero, sicchè, per $x=a$, la (6) non rappresenta più l'integrale generale della (3), ma soltanto un suo integrale particolare.

(1) Ved. Tricomi, loc. cit., teorema VI.

(2) Ved. per es. E. Picard, *Traité d'Analyse*, 2e éd., tome III (Paris, Gauthier-Villars, 1908), pag. 297.