ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

appartengono al sistema solare, esse avranno un periodo estremamente lungo, misurabile in secoli piuttosto che in anni. Perciò, in armonia con la nomenclatura classica della meccanica celeste, io proporrei di chiamarle *Comete secolari*, riservando alle ordinarie comete (delle famiglie di Giove, Saturno, Urano e Nettuno) il nome di *Comete periodiche*. E come abbiamo visto, il problema dell'origine delle *Comete secolari* si connette in modo stretto ed inatteso con quello del movimento del sole nello spazio.

Matematica. — ***Sulla varietà degli spazi tangenti a una data varietà.*** **Nota II** [1] **di** **ALESSANDRO TERRACINI, presentata dal Socio C. SEGRE** [*].

4. Per risolvere il problema B) per $k=3$, $g=2$, occorre dunque ricercare le V_3 integrali di un sistema di due equazioni di Laplace, le cui coniche associate contengono come parte una stessa retta r. Disponendo in modo opportuno dei parametri cui si riferiscono i punti della V_3, si può supporre che quel sistema di equazioni leghi linearmente fra loro, in due modi diversi, i punti

$$x\,,\, x^{(1)}\,,\, x^{(2)}\,,\, x^{(3)}\,,\, x^{(11)}\,,\, x^{(12)}\,,\, x^{(13)}\,. \tag{7}$$

La V_3 rientra dunque in una categoria già considerata dal prof. Segre [2]: applicando una sua osservazione, possiamo perciò dire che *le* V_3, *per cui* $g=2$ *sono le* V_3 *generiche* [3] *tra quelle solcate da* ∞^2 *linee, tali che gli* ∞^1 S_3 *tangenti alle* V_3 *nei punti di una tal linea costituiscano una sviluppabile ordinaria* (*eventualmente degenere*).

Di più, *si possono assegnare, in modo esplicito*, (come verrà ora indicato) *le coordinate di un punto che descriva una tale* V_3, *in funzione di un oppor-*

mente importante, non deve però essere preso in modo assoluto. Prescindendo infatti da possibili lievi errori di osservazione, occorre correggere l'eccentricità dalle perturbazioni cagionate dall'attrazione dei pianeti; e tali correzioni, in generale, possono farsi praticamente solo col metodo delle *Perturbazioni speciali*. Ora, com'è noto, l'esattezza di questo metodo diminuisce quanto più si prolunga l'intervallo di tempo a cui estendiamo il calcolo. Potremo dunque correggere l'orbita dalle perturbazioni prodotte nelle vicinanze di quel passaggio al perielio che noi osserviamo, e non già dalle antiche perturbazioni avvenute nei passaggi precedenti. Il dubbio perciò continua a sussistere.

[1] Ved. la Nota I in questo volume dei Rendiconti, a pag. 130.

[*] Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1920.

[2] *Preliminari* ecc. cit. nella Nota I (ved. il n. 30).

[3] Colla parola *generiche* intendiamo dire che quelle V_3 non rappresentino altre eq. di Lap., se non quelle che traducono analiticamente la proprietà geometrica che loro serve di definizione.

tuno sistema di parametri. A tale scopo, si osservi che il sistema di due equazioni di Laplace sopra considerato è di quelli che il Bompiani [4] studiò sotto il nome di sistemi a caratteristica, assegnando per essi l'integrale generale. Veramente, i risultati del Bompiani risentono, in parte, di una inesattezza incorsa in un suo ragionamento: essi si possono completare nel modo che segue. Nel caso (*non parabolico*), in cui nel fascio di coniche associate non ve n'è alcuna costituita dalla retta r contata doppiamente, possiamo valerci senz'altro dei risultati del Bompiani, ai quali rimandiamo il lettore (ved. il n. 19 della sua Nota citata) [4 bis]. Invece, nel caso opposto (*parabolico*), quel sistema di equazioni si può immaginare costituito da due equazioni, che leghino linearmente a x e alle sue derivate prime, rispettivamente $x^{(11)}$ e $a_2 x^{(12)} + a_3 x^{(13)}$ (dove a_2 e a_3 sono certe funzioni di τ_1, τ_2, τ_3). Il paragone delle due espressioni di $a_2 x^{(112)} + a_3 x^{(113)}$ che, con opportune derivazioni, si traggono da quelle due equazioni, porta allora alla conclusione che, nella prima, sono nulli i coefficienti di $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$, e che, perciò, la V_3 integrale risultando rigata, il sistema si può supporre ridotto alla forma

$$(8)\qquad \begin{cases} x^{(11)} = 0, \\ a_2 x^{(12)} + a_3 x^{(13)} + b_1 x^{(1)} + b_2 x^{(2)} + b_3 x^{(3)} + bx = 0 ; \end{cases}$$

e conduce ulteriormente a stabilire fra le a e le b le relazioni

$$(9)\qquad \left\| \begin{matrix} a_2^{(1)} + b_2 & a_3^{(1)} + b_3 & b_1^{(1)} + b & b_2^{(1)} & b_3^{(1)} & b^{(1)} \\ a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 & b \end{matrix} \right\| = 0 .$$

Di qui si ricava intanto che i rapporti fra le b_2, b_3, b non dipendono da τ_1; lo stesso si può dunque supporre — senza diminuire la generalità — che valga per le stesse b_2, b_3, b. La considerazione delle ulteriori relazioni compendiate in (9) porta allora a porre

$$(10)\qquad \begin{cases} b_1 = -\tau_1 b(\tau_2, \tau_3) + B(\tau_2, \tau_3) \ ; \ a_2 = -\tau_1 b_2(\tau_2, \tau_3) + B_2(\tau_2, \tau_3) ; \\ \qquad\qquad a_3 = -\tau_1 b_3(\tau_2, \tau_3) + B_3(\tau_2, \tau_3) . \end{cases}$$

In tal modo, poichè la prima delle (8) permette di scrivere

$$x = h(\tau_2, \tau_3) + \tau_1 k(\tau_2, \tau_3) ,$$

la seconda diventa

$$(11)\qquad Bk + B_2 k^{(2)} + B_3 k^{(3)} + bh + b_2 h^{(2)} + b_3 h^{(3)} = 0 ,$$

[4] Citato nella Nota I.

[4 bis] Si avverta tuttavia che il sistema di eq. di Lap. in questione è bensì riducibile alla forma canonica assunta e sfruttata dal Bompiani, ma la dimostrazione di tale riducibilità esige un ragionamento diverso da quello incompleto, che il B. fa al n. 7.

la quale equazione esprime che gli S_3 tangenti alla V_3 nei singoli punti di una sua retta generica stanno in uno S_4 (anzichè in uno S_5, come avviene in generale). Viceversa, dalla (11) segue che $x = h + \tau_1 k$ soddisfa al sistema (8), e, come facilmente si verifica, in generale non ad altre eq. di Lap. che non siano in esso contenute. *Le V_3 integrali sono dunque, nel caso parabolico, V_3 generiche fra le V_3 rigate con S_4 tangente fisso lungo ogni retta generatrice.* Per costruirle tutte, si osservi che, se nella (11) è $B = B_2 = B_3 = 0$, oppure $b = b_2 = b_3 = 0$, il luogo del punto h, oppure del punto k, è una curva (anzichè una superficie) [5]: la V_3 si compone allora di ∞^1 coni generici. Se no, quei due luoghi sono rispettivamente due superficie H e K, le quali vengono a essere riferite, per il tramite delle rette generatrici di V_3, in modo che i loro piani tangenti in punti corrispondenti h e k sono incidenti in un punto s [come mostra la (11)]. Se le linee, siano φ e ψ, inviluppate rispettivamente su H e K dalle tangenti hs e ks risultano corrispondenti (ciò che in generale non avverrà), la retta hk della V_3 riesce incidente a un'altra retta della V_3 infinitamente vicina (quella che congiunge i punti rispett. della φ e della ψ per h, k, infinitamente vicini a questi punti) [6]: le rette di V_3 si distribuiscono pertanto su ∞^1 superficie sviluppabili. Se invece i sistemi delle linee φ e ψ non risultano corrispondenti, si assumano dei parametri τ_2, τ_3 in modo che quelle siano rispettivamente le linee (su cui varia) τ_2 e τ_3; allora h e k soddisfanno alla [7]

$$uh + h^{(2)} + vk + v_3 k^{(3)} = 0,$$

che si integra senz'altro e porge

$$(12)\qquad x = e^{-\int u d\tau_2}\left\{ f(\tau_3) - \int e^{\int u d\tau_2}\left[vk + v_3 k^{(3)}\right] d\tau_2 \right\} + \tau_1 k(\tau_2, \tau_3),$$

f essendo una funzione arbitraria. La (12) [scritta in corrispondenza di funzioni $u(\tau_2, \tau_3)$, $v(\tau_2, \tau_3)$, $v_3(\tau_2, \tau_3)$ fissate e di funzioni f, k variabili da una coordinata all'altra] fornisce le coordinate di un punto che descrive la V_3 integrale. Quindi, *nel caso parabolico, riferendo la V_3 integrale a un opportuno sistema di parametri, le coordinate di un suo punto sono date dalla* (12), *oppure da*

$$(13)\qquad x = \mathrm{E}(\tau_3) + \tau_1 \mathrm{F}(\tau_2, \tau_3),$$

(5) Quel punto non può restare fisso; se no, la V_3 sarebbe un cono, e rappresenterebbe almeno tre eq. di Lap. lin. ind.

(6) Anche la conferma analitica ne è immediata.

(7) Assumiamo senz'altro, nella seguente equazione, uguale a 1 il coefficiente di $h^{(2)}$, potendoci sempre ridurre a tale ipotesi, purchè quel coefficiente sia $\neq 0$, e ciò è lecito supporre, se non si vuole ricadere sul caso dianzi trattato.

o infine da

(14) $$x = \mathrm{E}(\tau_2, \tau_3) + \tau_1 \mathrm{E}^{(2)}(\tau_2, \tau_3),$$

dove E *e* F *sono funzioni arbitrarie* (8).

5. Per $k = 4$ vogliamo ancora risolvere il problema A), nel caso di $g = 2$ (il solo che resti da trattare). Allora $\boldsymbol{\Gamma}$ è una congruenza di rette, di classe *uno*, nello S_3 delle quadriche associate: e per le singole rette di $\boldsymbol{\Gamma}$ passano ∞^2 quadriche di $\boldsymbol{\Sigma}$: la dimensione d di $\boldsymbol{\Sigma}$, in base alla (5), può assumere i valori 2, o 3, o 4. Il primo caso non si può verificare, se non quando le rette di $\boldsymbol{\Gamma}$ — che allora appartengono a tutte le quadriche di $\boldsymbol{\Sigma}$ — stanno in un piano. Per $d = 2$, il sistema $\boldsymbol{\Sigma}$ è dunque costituito da ∞^2 quadriche contenenti un piano fisso.

Sia ora $d = 3$. Se la congruenza $\boldsymbol{\Gamma}$ è d'ordine *zero*, cioè è formata dalle rette di un piano ω, il sistema $\boldsymbol{\Sigma}$ contiene un sistema lineare ∞^2 (e non più ampio), avente per base quel piano. Infatti le ∞^2 quadriche di $\boldsymbol{\Sigma}$ che passano per un punto A di ω — il quale non sia punto base di $\boldsymbol{\Sigma}$ (9) — contengono per intero le rette generiche di $\boldsymbol{\Gamma}$ uscenti da A, e quindi tutto quel piano. — Se invece l'ordine di $\boldsymbol{\Gamma}$ è > 0, le ∞^2 quadriche di $\boldsymbol{\Sigma}$, passanti per un punto generico dello spazio, vengono a contenere le rette di $\boldsymbol{\Gamma}$ per quel punto, e perciò (10) $\boldsymbol{\Sigma}$ ha la jacobiana indeterminata. D'altra parte, su ogni retta generica di $\boldsymbol{\Gamma}$, le quadriche di $\boldsymbol{\Sigma}$ segano una stessa coppia di punti (distinti o no), e pertanto, non potendo le rette di $\boldsymbol{\Gamma}$ concorrere tutte in un punto, segue che $\boldsymbol{\Sigma}$ è dotato di una linea base. Tra i varî sistemi lineari ∞^3 di quadriche a jacobiana indeterminata (11), si potranno dunque ritenere come possibili sistemi $\boldsymbol{\Sigma}$ il sistema delle quadriche

(8) Il primo tipo di soluzioni manca fra quelli assegnati dal Bompiani (al n. 11 della sua Nota citata). La ragione consiste in ciò, che, come forma canonica del sistema parabolico in questione, egli assume la nostra (8) con $a_3 = 0$ (ved. il n. 7 della sua Nota): ma la riduzione a una tal forma si può fare, solo se il sistema differenziale nella F: $\mathrm{F}^{(1)} = a_2 \mathrm{F}^{(2)} + a_3 \mathrm{F}^{(3)} = 0$ è completo, cioè se $\begin{vmatrix} a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$, ciò che non segue dalle condizioni di integrabilità (9). Considerando più in generale, come fa il Bompiani, un sistema parabolico di ν equazioni a caratteristica per una funzione x di k variabili indipendenti, si trova che una critica analoga non ha luogo per $\nu > 2$; mentre, per $\nu = 2$, alle V_k integrali che egli assegna occorre aggiungere le generiche ∞^{k-1} di rette con S_{2k-3} tangente fisso lungo ogni generatrice (per le quali si può dare una rappresentazione analitica analoga a quella qui assegnata per $k = 3$).

(9) Un tal punto esiste certo; altrimenti in $\boldsymbol{\Sigma}$ vi sarebbero quadriche contenenti un piano arbitrario.

(10) Cfr. i due enunciati a pag. 235 di Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*. Pisa, 1907.

(11) Cfr. Toeplitz citato nell'ultima nota a piè di pagina della Nota I.

per due rette sghembe, e il sistema delle quadriche mutuamente tangenti nei punti di una retta ([12]).

Sia infine $d = 4$. Su una retta generica u di Γ le quadriche di Σ segano coppie di una involuzione I. Se questa degenerasse, Σ avrebbe una base incontrata dalle singole rette di Γ, base che non potrebbe constare di un numero finito di punti (essendo Γ di classe *uno*), nè essere una retta (ved. il n. 3), nè infine una conica (giacchè allora Σ conterrebbe il sistema lineare ∞^3 avente per base il piano di quella conica, ciò che è da escludere). I punti doppî, distinti, della involuzione I forniscono allora, su una u generica, una coppia di punti coniugati rispetto a tutte le quadriche di Σ, coppia appartenente perciò alla jacobiana di Σ. Se il luogo di quella coppia di punti, al variare di u, è una linea, cosicchè risulta una linea il luogo dei fochi, distinti, delle rette di Γ, questa congruenza, che è di classe *uno*, è ([13]) la congruenza lineare delle rette appoggiate a due rette sghembe, le quali vengono a risultare mutuamente polari rispetto alle quadriche di Σ. Σ è dunque in tal caso un sistema lineare ∞^4 che ammette due rette sghembe polari fisse. — Se, finalmente, il luogo dei punti doppî di I, e per conseguenza la jacobiana di Σ comprende una parte superficiale ([14]), Σ rientrerà fra i sistemi determinati dal Bonferroni ([15]), come quelli appunto che godono di quest'ultima proprietà. Tra essi sono il sist. lin. ∞^4 comprendente una rete avente un piano base, il sist. lin. ∞^4 contenente tutte le quadriche per due rette sghembe, il sist. lin. ∞^4 contenente tutte le coppie di piani di un fascio. Altri due sistemi sono elencati dal Bonferroni, i quali però non fanno al caso nostro: essi sono il sistema contenente un sistema ∞^3 con piano base (da scartare per un'ovvia ragione) e quello, rispetto al quale un punto Z ha uno stesso piano polare. Quanto a quest'ultimo sistema, il quale contiene un sistema ∞^3 di coni di vertice Z, basterà osservare che per una retta generica u di Γ passerebbero almeno ∞^1 fra quei coni; e perciò, assunta una generica ∞^1 di rette u di Γ, non passanti per Z e proiettate

([12]) Potrebbe restare il dubbio, che a questi fosse da aggiungere qualche (opportuno) sistema ∞^3 di coni col medesimo vertice; ma un ragionamento analogo a quello fatto più avanti nella nota ([14]) prova che un tal sistema conterrebbe necessariamente una rete con piano base (caso già rilevato).

([13]) Cfr. per es. Sturm, *Die Gebilde I und II Grades der Liniengeometrie....*, Leipzig, 1892-96, Band II, pag. 32.

([14]) Se la jacobiana di Σ è addirittura indeterminata, Σ è un sistema ∞^4 di coni col medesimo vertice; e dalla esistenza di una retta u di Γ non passante per il vertice, si inferisce che il piano di una tal retta e del vertice sta su ∞^2 quadriche di Σ: il sistema rientra in una categoria che verrà enumerata più avanti.

([15]) *Sui sistemi lineari di quadriche la cui jacobiana ha dimensione irregolare.* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. L (1915).

da Z secondo piani distinti [16], segando quel sistema ∞^3 di coni con un piano generico, si avrebbe, su questo, un sist. lin. ∞^3, Σ_0, di coniche, tale che esisterebbero ∞^1 rette contenute, ciascuna, in tutte le coniche di qualche fascio del sistema Σ_0; ciò che importerebbe (si pensi al sist. lin. ∞^1 apolare) l'essere contenute in Σ_0 tutte le coppie di rette per un certo punto, e, di conseguenza, l'essere contenute in Σ tutte le coppie di piani per una certa retta (caso già trovato).

Viceversa, si riscontra pressochè immediatamente che tutti i sistemi Σ trovati come possibili soluzioni del problema A) sono effettivamente tali, solo che si escludano quei particolari sistemi ∞^4 che eventualmente risultino dotati di retta base. Perciò

Le V_4 *per le quali* $g = 2$ *sono, tutte e sole, le* V_4 *rappresentanti un sistema di equazioni di Laplace, il cui sistema lineare di quadriche associate appartenga a uno dei seguenti tipi:*

1) *sist. lin.* ∞^2 *di quadriche contenenti un piano;*

2) *sist. lin.* ∞^3 *contenente un sist. lin.* ∞^2 (e non più ampio) *del tipo precedente; sist. lin.* ∞^3 *di quadriche per due rette sghembe, oppure mutuamente tangenti lungo una retta;*

3) *sist. lin.* ∞^4 *contenente un sist. lin.* ∞^3 *di uno dei tipi precedenti* (ma non contenente le ∞^3 quadriche per un piano); *sist. lin.* ∞^4 *che ammette due rette sghembe polari fisse, oppure contiene tutte le coppie di piani di un fascio. Tra i sist. lin.* ∞^4 *vanno però esclusi quelli che eventualmente risultino dotati di retta base.*

[16] Ciò non si potrà fare quando (e solo quando) le rette di Γ stiano tutte in un piano, sia questo ω: ma allora vi è in Σ una rete di quadriche contenenti ω (caso già noto). Infatti, se così non fosse, le due reti determinate rispett. da due rette generiche di ω starebbero in un sistema lineare ∞^3 (dedotto da Σ colla imposizione di un punto base nella intersezione di quelle due rette), e quindi, notoriamente, tutte quelli reti, non potendo stare in uno stesso sist. lin. ∞^3 (cfr. la trattazione fatta più sopra per $d = 3$), conterrebbero uno stesso fascio. Vi sarebbe dunque in Σ un fascio di quadriche contenenti come parte ω; di conseguenza Σ segherebbe su ω una rete di coniche, tale che una retta generica di ω farebbe parte di qualche conica della rete. Questa, e perciò Σ, risulterebbe dotata di una retta base, ciò che è da escludersi (cfr. il n. 3).