ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI
1920

drico allungato; il quarzo ialino che rimane, formando come tante efflorescenze verticali ed orizzontali, presenta un po' grossolanamente l'interno della spugna e, qua o là, brevi tratti d'intreccio microsclerico intatto; talora viene subito a galla qualche velo d'intreccio siliceo colloide perfetto che poi si scioglie. Con scarso risultato provai la soluzione in acido acetico per non intaccare la silice colloide, e, viceversa, l'azione della potassa caustica per intaccarla.

Fra i residui della soluzione rimangono piccole particelle dell'intreccio limonitico. La colorazione di sottili sezioni con l'*orange* e con l'*eosina*, compenetranti le sostanze colloidi, mi provò che parti dell'intreccio con la superstite silice idrata passano direttamente al quarzo. I canali interni delle spicule si vedono assai di rado: talora sono ingranditi. Le megasclere hanno spesso i contorni corrosi: l'intreccio limonitico a forte ingrandimento si presenta come sbavato.

Riassumerò le centinaia di sezioni che ho fatto e darò le indicazioni speciali principiando dagli strati quarzitici immediatamente sottostanti al calcare fossilifero triassico.

Matematica. — *Di alcune varietà abeliane.* Nota I di GIUSEPPE MARLETTA, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO (*).

Una classe di varietà abeliane, a $p > 1$ dimensioni, degna di rilievo è quella C della quale ciascuna varietà ammette una trasformazione birazionale, in se stessa, periodica e rappresentata analiticamente da una sostituzione lineare, sui parametri della varietà, avente per moltiplicatori p radici dell'unità distinte e appartenenti tutte ad uno stesso esponente.

Per $p = 2$ ogni varietà della classe C o è una superficie iperellittica armonica o equianarmonica ([1]), ovvero è una superficie, almeno due volte singolare, appartenente ad uno qualunque di due tipi già caratterizzati ([2]), o infine è una superficie isomorfa alla superficie di Jacobi-Humbert o di Jacobi-Bolza ([3]). Per $p = 3$ sono stati già determinati ([4]) i quattro tipi possibili, dei quali due non erano noti.

(*) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1920.

([1]) G. Scorza, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XLI (1916), pp. 263-380], parte II, n.i 6 e 7.

([2]) G. Bagnera e M. De Franchis, *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti* [Memorie di Matematica e di Fisica della Società italiana delle Scienze, detta dei XL, serie 3ª, tomo XV (1908), pp. 251-343], n.i 39 e 40; e Scorza, loc. cit. in ([1]), parte II, n.i 45 e 46.

([3]) Loc. cit. in ([1]), parte II, § 6 e n. 54; e loc. cit. in ([2]), n.i 25 e 26.

([4]) C. Raciti [Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LIV (1919), pp. 443-449].

In questo breve lavoro esamino il problema per p qualunque, facendo delle osservazioni, d'indole generale, che credo utili, specialmente per p dispari o addirittura numero primo. Infine studio accuratamente l'ipotesi $p=5$ che conduce a quattro varietà abeliane, tre delle quali sono pure, nuove, e costituiscono i primi esempî di varietà abeliane, a 5 dimensioni, pure e con l'indice di moltiplicabilità 9, cioè col massimo indice di moltiplicabilità compatibile con l'ipotesi che la varietà sia pura e a 5 dimensioni.

1. Sia Γ una varietà abeliana (5) a $p>1$ dimensioni; essa ammetta, in se stessa, una trasformazione birazionale periodica T rappresentata analiticamente da una sostituzione lineare i cui moltiplicatori siano p radici dell'unità distinte e tutte appartenenti ad uno stesso esponente r.

È noto (6) che l'equazione caratteristica $D(\varrho)=0$ della sostituzione riemanniana S della matrice di Riemann cui appartiene Γ, sostituzione legata a T, si scinde in due determinate equazioni $\Delta(\varrho)=0$ e $\overline{\Delta}(\varrho)=0$, aventi per radici rispettivamente i moltiplicatori sopradetti e i numeri complessi a questi coniugati. Or siccome questi moltiplicatori appartengono, per ipotesi, all'esponente r, anche le radici di $\overline{\Delta}(\varrho)=0$ apparterranno a questo stesso esponente; ne segue che le radici di $D(\varrho)=0$ sono (7) tutte le radici primitive r^{sime} dell'unità, onde (8) si ha

$$m\varphi(r)=2p.$$

Ma i p moltiplicatori sono, per ipotesi, tutti distinti, quindi è $\varphi(r)\geq p$, e di conseguenza o $\varphi(r)=p$ ovvero $\varphi(r)=2p$.

Supporremo sempre che sia $\varphi(r)=2p$, ipotesi che non implica alcuna restrizione per p dispari.

2. Sia dunque r un numero tale che si abbia $\varphi(r)=2p$. L'equazione caratteristica $D(\varrho)=0$ è quindi l'equazione, di grado $2p$, alle radici primitive r^{sime} dell'unità; ma questa equazione è priva di radici multiple, quindi due qualunque moltiplicatori di T non sono (9) numeri complessi coniugati.

(5) Seguendo il prof. G. Scorza, chiamerò *varietà abeliana* a p dimensioni una varietà (necessariamente algebrica) che ammette una rappresentazione parametrica mediante funzioni abeliane a p variabili indipendenti $u_1, u_2, \ldots, u_p$, appartenenti a una stessa tabella di periodi primitivi $\omega \equiv |\omega_{j,1}, \omega_{j,2} \ldots, \omega_{j,2p}|$ $(j=1, 2, \ldots, p)$, la rappresentazione essendo tale che ad ogni punto della varietà corrisponda, a meno di periodi, un solo gruppo di valori per le variabili u_j. Per $p=1$ la varietà sarà una curva ellittica; per $p=2$ la varietà verrà chiamata superficie *iperellittica*.

(6) Scorza, loc. cit. in (1), parte I, n. 22.

(7) Scorza, loc. cit. in (1), parte I, n. 25.

(8) Scorza, loc. cit. in (7).

(9) Scorza, loc. cit. in (6).

3. Siano $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ p radici primitive r^{sime} distinte dell'unità due qualunque numeri complessi non coniugati; assunte come moltiplicatori della trasformazione T, la varietà abeliana **Γ** appartiene [10] ad una matrice riemanniana isomorfa alla matrice

$$\omega = \left\| \begin{matrix} 1 & \mu_1 & \mu_1^2 & \ldots\ldots & \mu_1^{2p-1} \\ 1 & \mu_2 & \mu_2^2 & \ldots\ldots & \mu_2^{2p-1} \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ 1 & \mu_p & \mu_p^2 & \ldots\ldots & \mu_p^{2p-1} \end{matrix} \right\|$$

matrice, questa, che è [11] riemanniana. È poi evidente che la varietà abeliana appartenente ad ω, ammette una trasformazione birazionale periodica avente i moltiplicatori $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$.

4. È noto [12] che ogni radice dell'equazione caratteristica di un'omografia è anche radice dell'equazione minima di questa (e viceversa); quindi, giacchè l'equazione $D(\varrho) = 0$ è (n. 2) di grado $2p$ e a radici tutte distinte, l'equazione minima dell'omografia relativa alla (n. 1) sostituzione riemanniana S è anch'essa di grado $2p$, onde la matrice ω ha il rango $2p$.

Si osservi inoltre che [13] la matrice ω o è impura e priva di assi isolati, ovvero è pura con gl'indici di singolarità e di moltiplicabilità rispettivamente eguali a $p - 1$ e $2p - 1$.

6. Se ω è impura, i suoi assi puri essendo tutti isomorfi tra loro, saranno tutti dello stesso genere q ($< p$), ove q è [14] un divisore di p. Il rango di uno qualunque di questi assi è $2q$; infatti ω è isomorfa [15] ad una matrice composta con p/q matrici riemanniane di genere q, ed è noto [16] che il rango $2p$ (n. 4) di ω è la somma dei ranghi delle sue matrici componenti.

Per $q = 1$, cioè se gli assi puri di ω sono ellittici, questi avranno dunque [17] gl'indici di singolarità e di moltiplicabilità rispettivamente eguali a 0 e 1. Ne segue [18] che indicando con k ed h rispettivamente gl'indici

(10) Scorza, loc. cit. in (1), parte I, n. 23.

(11) Scorza, *Sopra alcune notevoli matrici riemanniane* [Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LIII (1918), pp. 1008-1017].

(12) G. Frobenius, *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 84 (1878)], e *Ueber vertauschbare Matrizen* [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, XXVI (1896)]; C. Rosati, *Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica* [Atti della R Acc. delle Scienze di Torino, vol. LI (1916), pp. 991-1014), n. 10.

(13) Scorza, loc. cit. in (11), n. 6.

(14) Scorza, loc. cit. in (1), parte I, n. 47.

(15) Scorza, loc. cit. in (1), parte I, n. 50.

(16) Scorza, *Il rango di una matrice di Riemann* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXVI, serie 5ª (1917), pp. 177-182], n. 5.

(17) Scorza, loc. cit. in (16), n. 4.

(18) Scorza, loc. cit in (1), parte I, n. 58.

di singolarità e di moltiplicabilità della matrice impura ω, sarà $k = p^2 - 1$ ed $h = 2p^2 - 1$, cioè ω è ad indici massimi.

Per $q = 2$, cioè se gli assi puri di ω sono iperellittici, questi avranno [19] i detti indici eguali rispettivamente ad 1 e 3; sarà quindi [20] $k = \dfrac{p^2 - 2}{2}$ ed $h = p^2 - 1$.

7. Sia p un numero dispari ed $r = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, con $a, b, c, \ldots$ numeri primi; sarà $\varphi(r) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots (a-1)(b-1)(c-1) \ldots$.

Dovendo (n. 1) essere $\varphi(r) = 2p$, se $a - 1$ è un numero pari, sarà $b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots (b-1)(c-1) \ldots$ un numero dispari. e quindi o tutti i fattori $b, c, \ldots$ non esistono, ovvero esiste soltanto b ed inoltre è $b = 2$ e $\beta = 1$. Nel primo caso è $r = a^\alpha$ con $a > 2$, quindi $\varphi(r) = a^{\alpha-1}(a-1)$ e di conseguenza $p = \frac{1}{2} a^{\alpha-1}(a-1)$. Nel secondo caso è $r = 2a^\alpha$ con $a > 2$, onde p assume lo stesso valore ora detto.

Concludiamo che

se p è un numero dispari, condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una varietà abeliana $\boldsymbol{\Gamma}$, a p dimensioni, dotata di una trasformazione birazionale periodica i cui moltiplicatori siano p radici dell'unità distinte e tutte appartenenti ad uno stesso esponente r, è che sia $p = \frac{1}{2} a^{\alpha-1}(a-1)$ con a numero primo maggiore di 2.

Se, in particolare, p è un numero primo, allora dal valore di p ora trovato si deduce che o è $a^{\alpha-1} = 1$ e quindi $a = 2p + 1$, ovvero è $\frac{1}{2}(a-1) = 1$ e quindi $a = 3$. Dunque se p è un numero primo, la condizione necessaria e sufficiente detta poco sopra, è che anche $2p + 1$ sia un numero primo.

8. Da quanto si disse nel numero precedente possiamo affermare, p es., che la varietà abeliana $\boldsymbol{\Gamma}$ non esiste per $p = 7, 13, 17, 25, 27, 31$.

9. Sia ancora p un numero primo (maggiore di 2).

Per $p = 3$ abbiamo (n. 7) $r = 3^2, 2 \cdot 3^2$, ovvero $r = 7, 2 \cdot 7$ [21].

Per $p > 3$, con $2p + 1$ numero primo, è $p = \frac{1}{2}(2p+1)^{1-1}[(2p+1) - 1]$ e quindi (n. 7) $r = 2p + 1$, ovvero $r = 2(2p + 1)$. Ma se il periodo di T è $2(2p + 1)$, la trasformazione T^2 avrà il periodo $2p + 1$, dunque si può concludere [22] che

se $p > 1$ è un numero primo e la varietà abeliana $\boldsymbol{\Gamma}$ ammette una trasformazione birazionale periodica i cui moltiplicatori siano p radici distinte dell'unità tutte appartenenti ad uno stesso esponente r, essa ammetterà certamente una siffatta trasformazione per la quale è $r = 2p + 1$.

(19) Scorza, loc. cit. in (16), n. 4; e loc. cit. in (1), parte II, n. 13.

(20) Scorza, loc. cit. in (1), parte I, n 55 (III).

(21) Raciti, loc cit. in (4), n. 1.

(22) Si noti che anche la trasformazione T^2 avrà per moltiplicatori p radici dell'unità *distinte* e tutte appartenenti allo stesso esponente $2p + 1$.