ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI
1920

Matematica. — *Sopra una equazione funzionale.* Nota I di Pia Nalli, presentata dal Corrisp. Bagnera [1].

1. In alcune Memorie sulle equazioni alle derivate parziali è occorso al Goursat di risolvere l'equazione funzionale

$$u(x) = u(\alpha x) + f(x) \tag{1}$$

nella funzione incognita u, α essendo una costante [2].

È essenziale l'ipotesi che sia $|\alpha|$ *diverso* da 1, ed allora, restando nel campo delle funzioni analitiche, se $f(x)$ è regolare nel punto $x=0$, affinchè la (1) ammetta soluzione finita, è necessario e sufficiente che sia $f(0)=0$, e precisamente se

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n$$

si ha una soluzione prendendo

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-\alpha^n}\, x^n + c$$

dove c è una costante arbitraria.

Questa anzi è la più generale soluzione analitica regolare nel punto $x=0$, come si vede eguagliando nei due membri di (1) i coefficienti delle stesse potenze di x.

2. L'idea fondamentale che ci ha guidati nelle ricerche che iniziamo con la presente Nota è di introdurre un parametro λ nella (1) ponendo

$$u(x) = \lambda u(\alpha x) + f(x). \tag{2}$$

Se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

si avrà una soluzione prendendo

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1-\lambda\alpha^n}\, x^n \tag{3}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1920.

[2] Goursat, *Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre*: 1er Mémoire [Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, IIe série, t. V (1903), pp. 405-436]; 2e Mémoire [Ibid., IIe série, t. VI (1904), pp. 117-144].

e questa è una funzione analitica di λ che ammette come poli i punti

$$(4) \qquad 1\,, \frac{1}{\alpha}\,, \frac{1}{\alpha^2}\,, \ldots.$$

ed è meromorfa se $|\alpha| < 1$.

Per $\lambda = \frac{1}{\alpha^n}$, se vogliamo che la soluzione resti analitica e regolare nel punto $x = 0$, evidentemente occorre e basta che sia $a_n = 0$.

Quando λ è diverso dai valori (4), la (2) ammette soluzione unica (sempre, s'intende, analitica e regolare in $x = 0$); se $\lambda = \frac{1}{\alpha^n}$ ed è $a_n = 0$, la (2) ammette infinite soluzioni che si ottengono aggiungendo alla (3) cx^n con c costante arbitraria; e si osservi che la funzione cx^n soddisfa all'equazione omogenea

$$u(x) = \frac{1}{\alpha^n}\, u(\alpha x)\,.$$

Ciò ci autorizza a chiamare x^n una *soluzione fondamentale* dell'equazione (2) ed $\frac{1}{\alpha^n}$ la corrispondente *costante caratteristica.*

E così alla serie di Taylor possiamo dare il seguente significato: una funzione $h(x)$, regolare nel punto $x = 0$, si sviluppa in serie di funzioni fondamentali dell'equazione funzionale (2), e la funzione $h(\alpha x)$ si sviluppa in modo analogo, dividendo ogni termine per la corrispondente costante caratteristica.

3. Più generalmente, consideriamo l'equazione

$$u(x) = \lambda\, g(x)\, u(\alpha x) + f(x)\,,$$

$g(x)$ ed $f(x)$ essendo funzioni analitiche regolari nel punto $x = 0$, ma qui supponiamo $|\alpha|$ *minore* di 1.

In seguito stabiliremo l'interessante risultato: *se $g(0) = 0$, la soluzione di questa equazione è unica ed è funzione i n t e r a di λ; ed invece se $g(0) \neq 0$, la soluzione è funzione m e r o m o r f a di λ che ammette come poli semplici i punti*

$$\frac{1}{g(0)}\,, \frac{1}{\alpha g(0)}\,, \frac{1}{\alpha^2 g(0)}\,, \ldots.$$

In quest'ultimo caso, quando λ non è un polo, la soluzione è unica; se λ è un polo, l'equazione omogenea

$$u(x) = \lambda\, g(x)\, u(\alpha x)$$

ammette una soluzione unica a meno di una costante moltiplicativa, e precisamente, in corrispondenza al polo $\lambda = \frac{1}{\alpha^n g(0)}$, questa soluzione è del tipo $u_n(x) = c\, x^n u_0(x)$, dove $u_0(x)$ denota la soluzione corrispondente al particolare polo $\frac{1}{g(0)}$, indipendente da α.

Per esempio, se si fa $g(x) = x + 1$, eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di x nei due membri dell'equazione omogenea

$$u_0(x) = (x + 1)\, u_0(\alpha x)$$

che si ha in corrispondenza al polo $\frac{1}{g(0)} = 1$, si trova

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)}\, x^n,$$

a meno di una costante moltiplicativa.

Ritornando al caso generale, la funzione $u_0(x)$ non si annulla per $x = 0$, perchè dalla relazione alla quale soddisfa $u_0(x)$, e cioè

$$g(0)\, u_0(x) = g(x)\, u_0(\alpha x),$$

risulta che se fosse $u_0(0) = 0$, tutte le derivate di $u_0(x)$ si annullerebbero per $x = 0$.

Se la $g(x)$ è regolare in un cerchio con centro nell'origine, la $u_0(x)$ è regolare nello stesso cerchio e si annulla solo negli zeri di $g(x)$ e nei punti che si ottengono da questi zeri moltiplicandoli per $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \dots$.

Una funzione $h(x)$ regolare in un cerchio con centro nell'origine si può sviluppare nella serie uniformemente convergente

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n\, u_n(x), \tag{5}$$

purchè in questo cerchio la $g(x)$ non si annulli. Si intende che in ciascuna u_n si è fissata la costante moltiplicativa.

In base all'equazione funzionale cui soddisfa u_n, si deduce dalla (5)

$$g(x)\, h(\alpha x) = g(0) \sum_{n=0}^{\infty} h_n\, \alpha^n\, u_n(x). \tag{6}$$

Questa equazione mostra che, quando una funzione $h(x)$ è rappresentata sotto la forma (5), l'operazione funzionale $g(x)\, h(\alpha x)$ eseguita sopra la funzione $h(x)$, equivale a dividere i varî termini dello sviluppo per le corrispondenti costanti caratteristiche. Nel caso di $g(x) \equiv 1$ abbiamo visto che lo sviluppo (5) diviene lo sviluppo in serie di potenze di x.