ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Meccanica. — *Sulle onde progressive, di tipo permanente, oscillatorie (seconda approssimazione).* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

In una Nota, comparsa lo scorso anno [2] nei Rendiconti di questa R. Accademia, ho iniziato lo studio, in seconda approssimazione, delle onde progressive, di tipo permanente, oscillatorie. Ivi, dopo aver trovato la soluzione generale della equazione caratteristica della prima approssimazione, ho mostrato come la soluzione, in seconda approssimazione, della equazione del nostro problema, dell'equazione cioè

$$\xi \frac{d}{d\xi}\left\{\varepsilon(\alpha\xi)+\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right\}+k\left\{\varepsilon(\alpha\xi)-\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right\}=$$

$$=-\xi\left\{\left[\varepsilon(\alpha\xi)+\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)+\varepsilon(\alpha\xi)\,\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right]\frac{d}{d\xi}\left[\varepsilon(\alpha\xi)+\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right]\right\}+$$

$$+\left[1+\varepsilon(\alpha\xi)+\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)+\varepsilon(\alpha\xi)\,\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right]\frac{d}{d\xi}\left[\varepsilon(\alpha\xi)\,\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right]\Bigg\},$$

resulta espressa (supposta privata del termine costante) mediante [3]

$$\varepsilon_2=\mu(\xi+\xi^{-1})-\frac{3k^2-1}{2}\,\mu^2(\xi^2+\xi^{-2})\,.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1920.

[2] Questi Rendiconti, vol. XXVIII, fasc. 5°, 2° sem., pag. 174.

[3] Giova richiamare, per comodità del lettore, il significato dei simboli.

Si pensi ad un canale rettilineo, a sponde verticali, col medesimo stato di moto lungo ogni retta perpendicolare alle sponde. Basterà allora studiare cotesto moto in una sezione parallela a coteste sponde. I caratteri qualitativi del moto stesso vengono supposti essere quelli che corrispondono ad onde propagantesi entro il canale senza alterazione di forma. La qualifica « permanente » sta quì a significare che, per un osservatore dotato della velocità di propagazione, il movimento ha carattere stazionario. Detta c la grandezza di cotesta velocità di propagazione ed assunto un sistema di assi x, y, animati della stessa velocità, avremo che le proiezioni della velocità in discorso saranno $-c$, o, supponendo orizzontale il fondo del canale ed intendendo l'asse y verticale e l'asse x, scorrente sul fondo, volto in senso opposto alla traslazione. L'asse delle y verrà supposto volto verso l'alto. La regione del moto sarà rappresentata, nel piano xy, da una striscia L, semplicemente connessa, indefinita, limitata, inferiormente, dall'asse delle x e, superiormente, da una linea libera l. Qualora questa linea consti di tratti riproducentesi periodicamente, le onde diconsi *oscillatorie*; diversamente si ha un tipo di onde, che comprende (come caso particolare) il caso dell'*onda solitaria*. Il movimento del liquido nella striscia L,

In una Memoria, che verrà inserita nel Nuovo Cimento, mostrerò, per extenso, come sono successivamente pervenuto (in seconda approssimazione) agli ulteriori resultati che qui mi permetto riassumere.

---

semplicemente connessa, viene supposto ovunque regolare ed irrotazionale. Esisterà, perciò, il potenziale $\varphi(x, y)$ (potenziale di velocità) uniforme e regolare in L. La funzione φ sarà funzione armonica, a motivo della incompressibilità del fluido; quindi si potrà definire la funzione associata ψ (detta funzione di corrente). Denotate con u e v le proiezioni della velocità *relativa* del fluido in un generico punto (x, y), ammetteremo naturalmente che sia positivo il limite inferiore dei valori di u, dovendosi, nel nostro caso, ogni singola particella fluida, ritenere dotata di velocità assoluta non rilevante in confronto alla velocità di propagazione $(-c, o)$, in modo, cioè, che la suddetta velocità relativa possa differire soltanto di poco dalla (c, o). Ciò premesso, posto $\varphi + i\psi = f$, $u - iv = w$, e considerato un piano di Gauss rappresentativo dei valori f, sul quale la striscia L viene rappresentata in modo conforme dalla striscia limitata dalle rette $\psi = o$ e $\psi = q$ (essendo q la portata del moto relativo per unità di larghezza del canale, nell'ipotesi di ritenere unitaria la densità del liquido), il Levi-Civita pervenne a caratterizzare il problema meccanico, relativo al suddetto moto di un liquido pesante, mediante la seguente equazione funzionale:

$$(1) \qquad \frac{d}{df}\left\{w\left(f+iq\right)w\left(f-iq\right)\right\} - ig\left\{\frac{1}{w(f+iq)} - \frac{1}{w(f-iq)}\right\} = 0\,.$$

la quale può dirsi insieme differenziale e alle differenze finite. In essa $i = \sqrt{-1}$, mentre g è la grandezza dell'accelerazione della gravità, ed f è la variabile complessa $\varphi + i\psi$; tutto essendo ricondotto alla determinazione di integrali $w(f)$ della (1), reali sull'asse reale, regolari nella striscia $\overline{\psi = \pm q}$, finiti all'infinito e tali che la loro parte reale non scenda, in cotesta striscia, al disotto di una costante positiva (del resto comunque piccola). Il caso che si tratti di onde oscillatorie, si traduce analiticamente nella periodicità di $w(f)$ (con periodo reale), per cui, allora, posto $\xi = e^{\frac{2\pi i f}{\omega}}$ (dove ω, quantità positiva, rappresenta il periodo), la funzione $w(f)$ diventa funzione uniforme e regolare della variabile complessa ξ nella corona corrispondente, nel piano ξ, alla suddetta striscia. Posto, inoltre, $\alpha = e^{-\frac{2\pi q}{\omega}}$ (con che α resulta frazione propria), la corona, corrispondente alla striscia $\overline{\psi = \pm q}$, si trova limitata, internamente, dalla circonferenza $|\xi| = \alpha$ ed, esternamente, dalla circonferenza $|\xi| = \frac{1}{\alpha}$. Posto, infine, $w = c(1 + \varepsilon)$ (dove c rappresenta la velocità di propagazione), avremo che l'equazione delle onde di tipo permanente, nel caso si tratti di onde oscillatorie, assume la forma superiormente riprodotta nel testo, essendo $k = \frac{g\omega}{2\pi c^2}$. L'equazione in discorso può, brevemente, scriversi $A(\varepsilon) = B(\varepsilon)$, dove A, come si vede, è un operatore lineare (nei riguardi di ε e della sua derivata), mentre B è un operatore non lineare.

L'equazione considerata dal Levi-Civita come caratteristica delle soluzioni approssimate è l'equazione $A(\varepsilon) = 0$. Ricordiamo come ε viene, insieme con α, supposta sviluppabile in serie di potenze intere e positive di un parametro γ; sicchè $\alpha = \alpha_0 + S(\gamma)$, essendo, in prima approssimazione, $\alpha = \alpha_0 \equiv \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$ ed $\varepsilon = \varepsilon_1 \equiv \gamma(\xi + \xi^{-1})$ (soluzione di Airy). Ricordiamo, poi, come la ε, in seconda approssimazione, si ottiene considerando

I. La espressione del *potenziale di velocità* è la seguente:

$$\varphi = cx + \mu \frac{c\lambda}{\pi} \operatorname{sen} 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{icy}{\lambda} - \mu^2 \frac{3(k^2-1)}{4\pi} c\lambda \operatorname{sen} 4\pi \frac{x}{\lambda} \cos 4\pi i \frac{y}{\lambda}.$$

II. L'equazione del *pelo libero* assume la forma

$$h - y = \mu \frac{\lambda}{i\pi} \operatorname{sen} 2\pi \frac{ih}{\lambda} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} - \frac{3k^2-1}{4i\pi} \mu^2 \lambda \operatorname{sen} 4\pi \frac{ih}{\lambda} \cos 4\pi \frac{x}{\lambda},$$

dopo avere introdotta la *profondità media*, la quale si trova espressa mediante

$$h = \frac{q}{c} + \frac{\mu^2 \lambda}{2i\pi} \operatorname{sen} 4\pi \frac{iq}{c\lambda}. \tag{2}$$

Fra la *massima sopraelevazione*, h_1, (sul livello medio) del pelo libero e la *massima depressione*, h_2, resulta un *divario*, $\delta^\star$, espresso da

$$\delta^\star = h_1 - h_2 = \frac{3k^2-1}{4\pi} \mu^2 \lambda \left(e^{4\pi \frac{h}{\lambda}} - e^{-4\pi \frac{h}{\lambda}} \right),$$

il quale, per onde lunghe, si riduce a

$$\delta^\star = 2(3k^2-1)\mu^2 h;$$

mentre, denotando *ampiezza d'onda* la semisomma $h^\star = \frac{h_1 + h_2}{2}$, si ha

$$h^\star = \frac{\mu}{2\pi} \lambda \left(e^{2\pi \frac{h}{\lambda}} - e^{-2\pi \frac{h}{\lambda}} \right),$$

e, quindi, per onde lunghe,

$$\mu = \frac{h^\star}{2h}.$$

III. Nei riguardi del *trasporto globale* (non emergente in prima approssimazione), cioè del flusso di liquido attraverso una verticale fissa, ci limiteremo pure a darne la espressione. Supponendo di considerare un intervallo di tempo eguale ad un periodo, e supponendo unitaria la densità del liquido,

---

l'equazione $A(\varepsilon) = B(\varepsilon_1)$ ed ivi ponendo $\alpha_0(1 + b_1\gamma + b_2\gamma^2)$ al posto di α ed $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_1 + \gamma^2 \sum_1^\infty \alpha_{2s}(\xi^s + \xi^{-s})$ al posto di ε; trascurando nella $A(\varepsilon_2) = B(\varepsilon_1)$ i termini, nei quali compaia γ con grado superiore al secondo, si ottiene $b_1 = 0$, $a_{22} = -\frac{3k^2-1}{2}$ ed $a_{2s} = 0$ per $s > 2$. Sicchè, denotando $\gamma + a_{21}\gamma^2$ con μ, potremo scrivere, in seconda approssimazione, $\alpha = \alpha_0(1 + b_2\mu^2)$ ed $\varepsilon = \varepsilon_2 \equiv \mu(\xi + \xi^{-1}) - \frac{3k^2-1}{2}\mu^2(\xi^2 + \xi^{-2})$.

il detto trasporto globale, per unità di larghezza del canale, resulta espresso da

$$\frac{\mu^2\lambda^2}{2i\pi}\,\mathrm{sen}\,4\pi\frac{ih}{\lambda},$$

il quale, per onde lunghe, riducesi a $2\mu^2 h\lambda$.

IV. Nei riguardi, infine, della *relazione* esistente, in seconda approssimazione, *fra la velocità di propagazione, la lunghezza d'onda e l'altezza del livello medio* (*profondità*), relazione, come vedremo, dipendente dal parametro μ (parametro, come abbiamo notato, proporzionale all'*ampiezza d'onda*), quì osserveremo, intanto, che essa si ottiene ricordando come (in seconda approssimazione) si ha

$$\alpha \equiv e^{-\frac{2\pi q}{\omega}} = \alpha_0(1 + b_2\mu^2)\,, \tag{3}$$

essendo b_2 un opportuno coefficiente. Giova pure ricordare che, nell'equazione funzionale fondamentale del Levi-Civita, $A(\varepsilon) = B(\varepsilon)$, quando si eguagliano a zero i coefficienti di γ e di γ^2, non interviene b_2. In questo senso può ritenersi giustificato di risguardare il termine correttivo in μ^2, nell'espressione di α, come un elemento che trascende la seconda approssimazione, in quanto b_2 figurerebbe soltanto nell'equazione proveniente dall'eguagliare a zero il coefficiente di γ^3 nella $A(\varepsilon) = B(\varepsilon)$. Tale è, in sostanza, il punto di vista adottato da Stokes, che conduce, anche in seconda approssimazione, alla relazione di Airy, dovendosi allora, logicamente, omettere, nella (3), anche la parte correttiva proveniente dall'esprimere $\frac{q}{\omega}$ mediante $\frac{h}{\lambda}$.

Lo studio della terza approssimazione permette la determinazione di b_2. Allora la (3), tenendo presente la (2), porge la relazione

$$k = \varkappa\left\{1 - \frac{\mu^2}{2}\,\frac{P(k)}{k^2 - 1}\right\},$$

avendo posto

$$\varkappa \equiv \frac{e^{2\pi\frac{h}{\lambda}} + e^{-2\pi\frac{h}{\lambda}}}{e^{2\pi\frac{h}{\lambda}} - e^{-2\pi\frac{h}{\lambda}}}\,,$$

$$P(k) \equiv 9(k^4 + 1) - 10\,k^2\,.$$

Pertanto (tenendo presente la teoria delle funzioni implicite) potremo scrivere

$$k = \varkappa\left\{1 - \frac{\mu^2}{2}\,\frac{P(\varkappa)}{\varkappa^2 - 1}\right\},$$

ovvero

$$\frac{g\lambda}{2\pi c^2} = \varkappa \left\{ 1 - \frac{\mu^2}{2} \frac{P(\varkappa)}{\varkappa^2 - 1} \right\},$$

perchè $k = \frac{g\omega}{2\pi c^3}$ e perchè si trova essere $\omega = c\lambda$. Come si vede, assegnato $\frac{h}{\lambda}$, potremo sempre trovare un numero, μ_0, positivo, così piccolo che, per $|\mu| < \mu_0$, resulti soddisfatta la diseguaglianza $k > 1$, come richiede il nostro metodo di approssimazioni successive.

Biologia. — *Ricerche sul manicotto glandulare (stomaco larvale) della Rana esculenta* [1]. Nota della dott. Iole Galotti, presentata dal Socio Battista Grassi [2].

Nel 1899 il prof. A. Ruffini [3] descriveva nelle larve di *Rana esculenta* la presenza di un particolare organo che ritenne andasse a formare la parte glandolare dello stomaco della forma definitiva: l'organo lo chiamò « manicotto glandulare ».

Prima del Ruffini il Rusconi aveva notata l'accennata formazione; ma l'aveva interpretata in maniera inesatta, pur osservando che entrava nella formazione dello stomaco definitivo. Come tale studio, prima del Ruffini, sia stato trascurato, può trovare probabile spiegazione nelle osservazioni del Cotronei [4], il quale ha dimostrato che in altre forme larvali di Anfibi anuri (*Bufo, Pelobates, Discoglossus*) questo manicotto non è macroscopicamente evidente.

Il Duesberg che nel 1906 descriveva le modificazioni istologiche nell'intestino della *Rana fusca*, notava la presenza del manicotto glandulare (*manchon*) del Ruffini, del quale ignorava il lavoro.

Con la presente Nota mi limito ad esporre brevemente i risultati delle mie ricerche sulle modificazioni istologiche del manicotto al momento della metamorfosi, essendo giunta a conclusioni differenti da quelle del Duesberg; rimando per lo studio completo del manicotto al lavoro in esteso corredato da figure, che spero poter pubblicare quanto prima.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto d'Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma, sotto la guida del dott. Giulio Cotronei, libero docente.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1920.

(3) Ruffini A., *Sullo sviluppo e sul tardivo contegno dello strato glandolare dello stomaco di Rana esculenta.* Monitore Zoologico Italiano, vol. X, anno X, 1899.

(4) Cotronei G., *L'apparato digerente degli Anfibi nelle sue azioni morfogenetiche.* R. Accademia dei Lincei, Memorie, 1914.