ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Meccanica. — *Forze di pressione su un montante di aeroplano.* Nota II di MARIO PASCAL, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO [1].

Nella Nota precedente [2], abbiamo ottenuto da una circonferenza, mediante rappresentazioni conformi, un profilo che abbiamo assunto come quello della sezione retta di un montante di aeroplano. Vogliamo ora procedere al calcolo della forza sostentatrice.

1. Supponiamo di esporre la circonferenza iniziale ad una corrente piana parallela data da

$$F = -V_0 z - k/z + ik \log z/\pi , \tag{1}$$

dove k è una costante e V_0 la velocità limite, e che è una corrente piana parallela modificata dall'incontro di un ostacolo circolare di raggio unitario e da un vortice il cui asse passa per l'origine delle coordinate (centro della circonferenza ostacolo) [3]. Per tale corrente la circuitazione delle velocità lungo il contorno dell'ostacolo è, come è facile calcolare,

$$C = 2k = 4\pi V_0 \operatorname{sen} \theta , \tag{2}$$

l'angolo θ individuando la posizione di entrambi i punti critici di velocità nulla sulla circonferenza, quando si assuma come polo il centro di questa e come asse polare la parallela condotta dal polo alla direzione della velocità limite.

Immaginiamo inoltre che la corrente (1) investa la circonferenza ostacolo in modo che la direzione della velocità limite sia parallela alla retta BA, ed abbia il senso della freccia. Sia γ l'angolo che BA fa con la direzione positiva dell'asse delle x, e siano B ed A i punti critici di velocità nulla: si vede facilmente, tenendo presenti le particolarità della compiuta trasformazione, che i punti a e b del profilo del montante sono quelli che corrispondono ad A e a B, e che sono anch'essi punti critici.

Facciamo ora l'ipotesi che la relazione

$$z = F(w)$$

(1) Presentata all'Accademia il 4 giugno 1920.

(2) Questi Rendiconti, vol. XXIX, 1° sem., pag. 448.

(3) Cfr. N. Joukowski, *Aérodynamique* [trad. par S. Drzewiecki], Paris, Gauthier Villars, 1916.

sia tale che, all'infinito, la F diventi una semplice funzione lineare, cioè che all'infinito si abbia

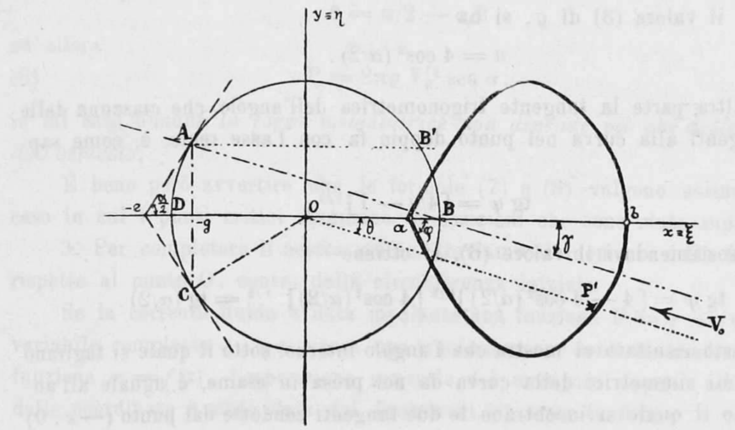
$$z = \lambda w ;$$

se allora è V_0 la velocità limite della corrente data, la corrispondente velocità limite della corrente trasformata sul piano w sarà [1]

$$V'_0 = \lambda V_0 ,$$

dove

$$\lambda = dz / dw .$$



Dalla espressione (5) della Nota precedente, che è quella della funzione che ci fa passare dal piano z al piano w, per un valore grandissimo di z, si ha

$$w = gz + 2$$

e perciò

$$V_0 = V_0 / g$$

che è *l'espressione della velocità limite della corrente trasformata sul piano* w.

Osserviamo ora che, per le condizioni cui soddisfano le costanti e, g, le tangenti condotte dal punto $(-e, 0)$ alla circonferenza data, toccano questa nei punti A e C, intersezioni della circonferenza con la retta perpendicolare all'asse reale e di ascissa $-g$. Se diciamo perciò $\alpha/2$ l'angolo che ciascuna delle due tangenti fa con l'asse x, si vede senza difficoltà che è

(3) $$g = \text{sen}\,(\alpha/2)$$

(1) N. Joukowski, loc. cit., pag. 143.

e perciò

(4) $$V_0 = V'_0 \operatorname{sen}(\alpha/2).$$

L'espressione della forza sostentatrice, che agisce sul montante di aeroplano, è dunque

(5) $$P = 4\pi\varrho V_0'^2 \operatorname{sen}(\alpha/2) \operatorname{sen}\theta$$

in cui ϱ è la densità del fluido.

2. Possiamo far vedere come *la forza sostentatrice* (5) *dipenda dalla speciale forma di profilo che si è considerata.*

Dalla relazione esistente fra le costanti g ed a (v. Nota I), e tenendo presente il valore (3) di g, si ha

(6) $$a = 4\cos^2(\alpha/2).$$

D'altra parte la tangente trigonometrica dell'angolo, che ciascuna delle due tangenti alla curva nel punto doppio fa con l'asse reale, è, come sappiamo,

$$\operatorname{tg}\varphi = [4/a - 1]^{1/2},$$

da cui, sostituendovi il valore (6), si ottiene

$$\operatorname{tg}\varphi = [4 - 4\cos^2(\alpha/2)]^{1/2}\,[4\cos^2(\alpha/2)]^{-1/2} = \operatorname{tg}(\alpha/2).$$

Questo risultato ci mostra che l'angolo interno, sotto il quale si tagliano i due rami simmetrici della curva da noi presa in esame, è uguale all'angolo sotto il quale si incontrano le due tangenti condotte dal punto $(-e, 0)$ alla circonferenza fondamentale.

Si può quindi dire che *il valore della forza sostentatrice, agente sul montante da noi considerato, dipende, oltre che dalla posizione dei punti critici di velocità nulla, anche dall'angolo sotto il quale i due rami simmetrici del contorno si incontrano posteriormente.*

La forza sostentatrice è nulla se $\theta = 0$ o se $\alpha/2 = 0$.

Il primo caso si verifica se la congiungente i due punti critici viene a passare per il polo, cioè per il centro della circonferenza fondamentale. Se supponiamo per es. che il punto critico A si sposti fino a raggiungere il punto D, saranno nulli gli angoli θ e γ, e quindi la forza sostentatrice. Sul profilo del montante i due punti critici si riunirebbero in b. La resistenza totale verrebbe ad essere costituita unicamente dalla sua seconda componente che è nella direzione e nel senso della velocità limite.

Il secondo caso si ha invece quando l'angolo posteriore 2φ del montante è tanto piccolo che può praticamente considerarsi nullo, vale a dire quando il profilo del montante è molto affilato posteriormente.

Se, come abbiamo supposto in principio, i due punti critici sulla primitiva circonferenza ostacolo risultano essere A e B, si può dare alla espressione (5) di P un'altra forma. È infatti chiaro che in questo caso è $\theta = \gamma$ e quindi

$$P = 4\pi\varrho\, V_0'^2 \operatorname{sen}(\alpha/2) \operatorname{sen}\gamma\,; \tag{7}$$

e notando che

$$\pi - \gamma = \pi/2 + \alpha/2 + \gamma\,,$$

si ricava

$$\gamma = \pi/4 - \alpha/4\,;$$

cosicchè anche l'angolo γ viene a farsi dipendere dall'angolo α, cioè dalla forma del profilo che si considera.

Se poi immaginiamo che, modificandosi la direzione della corrente, il punto A rimanga punto critico, ma il punto critico B si sposti fino ad assumere la posizione B', si avrà

$$\theta = \pi/2 - \alpha/2$$

ed allora

$$P = 2\pi\varrho\, V_0'^2 \operatorname{sen}\alpha\,: \tag{8}$$

in tal caso dunque *la forza sostentatrice non dipende più che dalla forma dell'ostacolo.*

È bene però avvertire che le formole (7) e (8) valgono soltanto nel caso in cui i punti critici assumano le posizioni che sono state supposte.

3. Per completare il nostro studio, troviamo il momento della forza (5) rispetto al punto O, centro della circonferenza iniziale.

Se la corrente fluida è data mediante una funzione $F = \varphi + i\psi$ della variabile complessa z, e si opera una trasformazione conforme mediante una funzione $w = f(z)$, l'espressione generale del momento rispetto all'origine delle coordinate è stata data dal Joukowski (¹) sotto la forma

$$M_0 = \text{p. r.}\left[\varrho/2 \int \left[\{dF/dz\}^2\, w/(dw/dz) \right] dz\right. \tag{9}$$

in cui, come è noto,

$$dF/dz = d\varphi/dx + i\, d\psi/dy = u - iv\,,$$

u e v essendo le componenti, secondo gli assi, delle velocità.

Osserviamo che, qualunque sia θ, se d è il valore di z che compete ad uno dei punti critici, sarà $-1/d$ il valore di z che corrisponde all'altro; detto allora γ l'angolo che la direzione della velocità limite V_0 fa con la direzione positiva dell'asse x, supponiamo che si abbia

$$dF/dz = -V_0 (z - d)(z + 1/d)(\cos\gamma + i \operatorname{sen}\gamma)/z^2\,. \tag{10}$$

Per $z = d$ e $z = -1/d$, questa formola ci dà $u = v = 0$; mentre, per $z = \infty$, si ottiene

$$u = -V_0 \cos\gamma \quad ; \quad v = V_0 \operatorname{sen}\gamma\,,$$

(¹) N. Joukowski, loc. cit., pag. 171.

risultati conformi alle ipotesi precedenti. Per tali considerazioni sarà dunque perfettamente lecito servirsi della (10).

Dalla

$$w = (gz^2 + 2z + g)/(z + g) + a(z + g)/(gz^2 + 2z + g),$$

che è la funzione mediante la quale si ottiene il profilo di montante (ved. Nota I), si ricava

$$dw/dz = (gz^2 + 2g^2 z + g)\left[(gz^2 + 2z + g)^2 - a(z + g)\right]/(z + g^2)(gz^2 + 2z + g)^2.$$

Pertanto, la funzione che figura sotto il segno d' integrale nella (9) sarà

$$(11) \qquad \{dF/dz\}^2 w/(dw/dz) =$$
$$= V_0^2 e^{2i\gamma}(z - d)^2 (z + 1/d)^2 (z + g)(gz^2 + 2z + g)/z^4 (gz^2 + 2g^2 z + g).$$

La ricerca del momento M_0 si riduce ora al calcolo dei residui relativi ai poli della precedente funzione, quando si supponga che essa possa prolungarsi nell' interno del contorno che si considera [1].

Eseguendo le operazioni che sono indicate, ci si convince facilmente che la funzione (11) ha, nel punto $z = 0$, un polo di primo ordine, il cui residuo è

$$(12) \qquad R = 2g^2 - 2hg + 4h/g + (k - 6)$$

in cui si è posto

$$1/d - d = h = -2i \operatorname{sen} \theta$$
$$1/d^2 + d^2 = k = 2 \cos 2\theta .$$

Per cose note della teoria delle funzioni analitiche, si ha perciò, sostituendo nella (9),

$$M_0 = \text{p. r.}\left[i\pi\varrho V_0^2 e^{2i\gamma} R\right],$$

dalla quale, con facili calcoli ed introducendo il valore P della forza sostentatrice, si ottiene

$$(13) \qquad M_0 = P\left[H \cos 2\gamma - K \operatorname{sen} 2\gamma\right],$$

avendo posto

$$H = 2 - g^2$$
$$K = (g^3 - 3g + g \cos 2\theta)/2 \operatorname{sen} \theta .$$

Fissati gli angoli γ e θ, può senza difficoltà calcolarsi graficamente il segmento espresso dal coefficiente di P nella (13), e così determinare il punto P′ di applicazione della forza sostentatrice, cioè il centro teorico di pressione.

[1] P. Burgatti, *Sopra un teorema del Joukowski relativo alla forza sostentatrice nei corpi in moto traslatorio uniforme entro un fluido* (Rend. Acc. delle scienze di Bologna, a. 1917-18).