ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 novembre 1920.

V. Volterra, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *Sopra alcune equazioni funzionali.* Nota del Socio S. Pincherle.

Non appena le ricerche di Volterra, seguite da quelle di Fredholm, ebbero richiamata l'attenzione dei matematici sulle equazioni integrali di tipo lineare, si osservò che parecchie delle considerazioni che conducevano alla loro risoluzione, e specialmente quelle fondate sul carattere lineare delle equazioni e dell'operazione di integrazione che ne sta a base, si potevano estendere ad altre equazioni funzionali di forma analoga, ma in cui l'operazione funzionale — a carattere essenzialmente distributivo — con cui codeste equazioni sono costruite, non è più espressa in forma di integrale definito: prescindendo dalla questione, studiata dall'Hadamard e dal Fréchet, se ogni operazione di tale natura sia suscettibile di codesta forma. Ad una tale estensione ho dedicato un apposito lavoro [1], di cui la seconda parte è tuttora inedita, dove l'operazione assunta a base è considerata in modo astratto, prescindendo da ogni sua rappresentazione analitica. La forma dell'operazione base si può specializzare in una infinità di modi; è particolarmente interessante quella in cui essa consiste nella sostituzione di una funzione determinata $\alpha(x)$ al posto della variabile, entro l'elemento funzionale su cui si

[1] *Appunti di calcolo funzionale.* Memoria prima. (Mem. dell'Acc. delle Scienze di Bologna, serie 6ª, tomo VIII, an. 1911).

opera: questa forma speciale pone in stretta relazione le equazioni funzionali cui essa dà origine coll'importante teoria dell'iterazione analitica. In due Note, in cui riassumo risultati della seconda parte del lavoro testè accennato [1], ho cercato di porre in luce quella relazione: riporto qui uno dei risultati più semplici, e riferentesi al caso più ovvio, al quale sono giunto in questo ordine di idee.

Sia $\alpha(x)$ un elemento di funzione analitica, regolare per $x=0$, nullo in quel punto, e con $\alpha'(0)=a$, $|a|<1$. È noto come in tale ipotesi esista una funzione $\omega(x)$, pure regolare per $x=0$ e nulla in quel punto, soddisfacente all'equazione di Schroeder

$$\omega(\alpha(x)) = a\omega(x); \tag{1}$$

essa è determinata da $\omega'(0)=1$. La $\omega(x)$ è la ben nota funzione di Koenigs, e nella citata Nota *Appunti su alcuni problemi di iterazione* è dato un metodo nuovo ed assai semplice per la sua determinazione. Ciò posto, data l'equazione, del tipo di Fredholm,

$$\varphi(x) - k\varphi(\alpha(x)) = f(x), \tag{2}$$

dove $f(x)$ è una funzione analitica regolare per $x=0$, nulla in $x=0$, e $\varphi(x)$ è una funzione incognita che si richiede pure essere analitica regolare per $x=0$, la soluzione ne è data da

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n \omega^n(x)}{1-ka^n}, \tag{3}$$

per tutti i valori di k diversi da $a^{-n}(n=1,2,\ldots)$. Le q_n sono determinate come coefficienti dello sviluppo di $f(x)$ in serie di potenze di $\omega(x)$, sviluppo facile a determinarsi formalmente, e che è, sotto le ipotesi ammesse, assolutamente ed uniformemente convergente in un intorno di $x=0$. Si scorge facilmente, da questo breve riassunto, come le a^{-n} e le $\omega^n(x)$ siano, in questa teoria, rispettivamente i numeri e le funzioni invarianti (gli autovalori e le autofunzioni) della teoria delle equazioni integrali. Il carattere analitico della (3) è manifesto: regolare in un intorno di $x=0$ rispetto alla variabile x, meromorfa coi poli a^{-n} rispetto alla variabile k. Il prodotto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-ka^n) \tag{4}$$

che, per essere $|a|<1$, è una trascendente intera — del resto ben nota

[1] *Sopra alcuni nuclei analitici.* (Rend. della R. Accad. delle Scienze di Bologna, 9 aprile 1916). *Appunti su alcuni problemi d'iterazione.* (Ibid., 20 maggio 1917).

nella teoria delle funzioni ellittiche — rappresenta qui il determinante di Fredholm.

Ora, in una recente Nota di questi Rendiconti [1], una egregia cultrice dell'Analisi, la signorina Pia Nalli, prendendo le mosse da un'equazione funzionale incontrata dal Goursat, ha risoluto la equazione (2) nel caso assai particolare in cui la funzione $\alpha(x)$ si riduce semplicemente ad ax, ed il risultato, cui essa giunge, è conforme a quello che è stato ora ricordato per il caso di una sostituzione analitica generale; essa tratta poi della equazione affine

$$\varphi(x) - kg(x)\,\varphi(ax) = f(x)\,. \tag{5}$$

Il caso trattato dalla signorina Nalli è però interessante perchè si collega con un altro tipo di equazioni funzionali degno di nota, e di cui mi sono pure ripetutamente occupato. Ed infatti, col cambiamento di x in e^t, di a in e^h, l'equazione (5) viene ad essere un caso particolare del tipo di equazioni funzionali

$$\sum_{n=1}^{p} \gamma_n(t)\,\psi(t+h_p) = f(t) \tag{6}$$

e di equazioni funzionali differenziali

$$\sum_{n=1}^{p}\sum_{m=0}^{q} \gamma_{mn}(t)\,\psi^{(m)}(t+h_n) = f(t) \tag{7}$$

dove le γ, f sono funzioni date, la ψ è la funzione da determinarsi. E queste, alla lor volta, appartengono alla classe più generale di equazioni della forma

$$\Sigma\,\gamma_n(x)\,\psi(\lambda_n(x)) = f(x)\,, \tag{8}$$

dove le λ_n sono pure funzioni date. Su queste, per quanto degne di interesse, non conosco alcuno studio generale: solo nella citata mia Nota del 1917 è indicato un metodo per collegare la (8) colle equazioni integrali, quando le γ_n si riducano a costanti e sulle $\lambda_n(x)$ si facciano ipotesi convenienti [2].

[1] *Sopra una equazione funzionale* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XXIX, pag. 23, an. 1920).

[2] Sulle equazioni del tipo (6) e (7) ved. Pincherle. *Sulla risoluzione dell'equazione* $\Sigma h_\nu\,\varphi(x+\alpha_\nu) = f(x)$ *a coefficienti costanti* (Mem. dell'Accad. di Bologna, serie IV, tom. 9°, an. 1888); *Sulla risoluzione della stessa equazione a coefficienti razionali* (ibid.); *Risoluzione di una classe di equazioni funzionali* (Rend. del Circolo mat. di Palermo, tom. 18°, an. 1904), e soprattutto: *Sull'inversione degli integrali definiti* (Mem. della Società italiana delle Scienze. detta dei XL, serie 3ª, tom 15°, an. 1907); signorina O. Polossuchin, *Ueber eine besondere Klasse von differenz. Funktionalgleichungen* (Dissert. Zurich, 1910); Er. Schmidt, *Ueber eine Klasse linear. funkt. Differentialgleichungen* (Math. Ann., tom. 70°, an. 1911).