# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXIX.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

abortiscono. e solo in qualche caso arrivano anche a completo e normale sviluppo.

Ho tentato la impollinazione artificiale servendomi naturalmente del polline di altre razze di Melo, e le mele provenienti dai fiori così impollinati hanno portato semi, che ho raccolto con cura e mi propongo di seminare per vedere che piante di Melo verranno fuori. Su ciò riferirò a suo tempo.

Mi sono qui limitato a questi brevi cenni delle mie ricerche, che altrove saranno esposte più ampiamente.

## Analisi matematica. — *Sur une classe d'ensembles parfaits discontinus.* Nota di ARNAUD DENJOY, presentata dal Socio VITO VOLTERRA.

Je demande respecteusement à l'Académie la permission de lui soumettre les considérations suivantes.

Sur un intervalle $a'b'$, soit un ensemble parfait P, d'extrémités $a$ et $b$, et tel que les semi-contigus $a'a$, $bb'$ bordant P soient au moins égaux à tout contigu quelconque de P, l'un des deux semi-contigus étant au plus égal à $b-a$ [1].

Nous dirons que P *présente le caractère* (A) *si deux intervalles contigus ou semi-contigus quelconques de* P *sont séparés par un segment au moins égal en longueur au plus petit de ces deux intervalles.*

$\lambda_0$ étant un nombre positif donné, soient $\alpha_1$ un point quelconque de P, et $\beta'_1 = \alpha_1 + \lambda_0$. (On pourrait prendre le signe — devant $\lambda_0$, à la condition de continuer ci-après constamment ainsi).

Si $\beta'_1$ n'est pas sur P, mais si $\beta'_1$ est à gauche de $b$, soit $\beta_1$ l'extrémité *droite* de l'intervalle contigu $u''_1$ contenant $\beta'_1$. (On pourrait prendre pour $\beta_1$ l'extrémité gauche de $u''_1$, et alors on envisagerait ci-après constamment des extrémités gauches de contigus). Soit $\alpha'_1$ déterminé par $\alpha'_1 + \lambda_0 = \beta_1$.

Si $\alpha'_1$ n'est pas sur P, soit $\alpha_2$ l'extrémité *droite* de l'intervalle contigu $u'_1$ contenant $\alpha'_1$. Nous construisons $\beta'_2 = \alpha_2 + \lambda_0$; et ainsi de suite.

Les opérations ne s'arrêtent que dans deux cas; ou bien, si un point $\beta'_p$ est à la droite de $b$; ou bien, avant que cette circonstance ne se produise, si nous trouvons un point accentué $\alpha'_p$ ou $\beta'_p$ appartenant à P. Dans le cas où les opérations ne s'arrêtent pas, il est évident que les suites $(\alpha_p, \alpha'_p)$

[1] Je distingue l'*intervalle ab* (ensemble $a < x < b$) du *segment ab* (ensemble $a \leq x \leq b$). Un *intervalle contigu* à l'ensemble parfait P est un intervalle sans points communs avec P, mais dont les deux extrémités appartiennent à P. Un intervalle sans point commun avec P, mais dont une extrémité et une seule appartient à P sera dénommé intervalle *semi-contigu* à P.

et $(\beta_p, \beta'_p)$ tendent respectivement vers deux points $\gamma$ et $\delta$ appartenant à P et dont la distance est $\lambda_0$. Un tel couple est donc mis en évidence dans tous les cas, sauf si un point $\beta'_p$ vient à droite de $b$. Il est à remarquer que ce couple est, parmi tous ceux qui vérifient les conditions $\delta - \gamma = \lambda_0$, $\alpha_1 \leq \gamma$, celui où $\gamma$ et $\delta$ ont respectivement les plus petites valeurs.

Considérons les deux suites constituées chacune de points distincts (en nombre impair par exemple, la parité étant indifférente):

$$\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha'_n, \alpha_{n+1}, \quad \text{et} \quad \beta'_1, \beta_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n, \beta_n, \beta'_{n+1}.$$

Deux lettres $\alpha$, $\beta$ occupant le même rang dans les deux suites, ont le même indice, l'une est accentuée, l'autre ne l'est pas, et elles désignent deux points dont la distance est $\lambda_0$. Les deux suites forment donc deux figures égales.

Je dis que *chacun des intervalles intermédiaires de la suite*

$$(\alpha_1, \alpha'_1), (\alpha'_1, \alpha_2), \ldots, (\alpha'_n, \alpha_{n+1}),$$

*surpasse en longueur l'un au moins des deux intervalles qui lui sont adjacents dans la même suite.*

Nous montrerons successivement: 1°) que l'intervalle $\alpha_p \alpha'_p$ surpasse l'un au moins des deux intervalles $\alpha'_{p-1}\alpha_p$ et $\alpha'_p\alpha_{p+1}$ si $p = 2, \ldots$, ou $n$; et 2°) que l'intervalle $\alpha'_p\alpha_{p+1}$ surpasse l'un au moins des deux intervalles $\alpha_p\alpha'_p$ et $\alpha_{p+1}\alpha'_{p+1}$ pour $p = 1, \ldots$, ou $(n-1)$.

Les lettres accentuées désignent des points étrangers à P. Soient respectivement $u'_p$ et $u''_p$ les intervalles contigus à P contenant $\alpha'_p$ et $\beta'_p$. $u'_p$ a pour extrémité droite $\alpha_{p+1}$, comme $u''_p$ a pour extrémité droite $\beta_p$. On a donc $u'_p > \alpha'_p\alpha_{p+1}$ et $u''_p > \beta'_p\beta_p$.

1°) L'intervalle $u'_{p-1}$ est séparé de $u'_p$ $(p = 2, \ldots, n)$ par un segment $s'_p$ dont l'extrémité gauche est $\alpha_p$ et dont l'extrémité droite est intérieure à l'intervalle $\alpha_p\alpha'_p$, puisque $\alpha'_p$ est intérieur à $u'_p$. On a évidemment

$$u'_{p-1} > \alpha'_{p-1}\alpha_p, \quad u'_p > \alpha'_p\alpha_{p+1}, \quad s'_p < \alpha_p\alpha'.$$

Mais, P présentant le caractère (A), $s'_p$ est au moins égal en longueur à l'un des deux intervalles $u'_{p-1}$ et $u'_p$. Donc, $\alpha_p\alpha'_p$ surpasse l'un au moins des deux intervalles adjacents $\alpha'_{p-1}\alpha_p$ et $\alpha'_p\alpha_{p+1}$.

2°) On démontre exactement de même que, des deux intervalles $\beta'_p\beta_p$ et $\beta'_{p+1}\beta_{p+1}$ contenus respectivement dans $u''_p$ et $u''_{p+1}$, l'un au moins est surpassé en longueur par $\beta_p\beta'_{p+1}$, qui est supérieur au segment $s''_p$ séparant $u''_p$ de $u''_{p+1}$. Mais $\beta'_p\beta_p = \alpha_p\alpha'_p$, $\beta_p\beta'_{p+1} = \alpha'_p\alpha_{p+1}$, $\beta'_{p+1}\beta_{p+1} = \alpha_{p+1}\alpha'_{p+1}$. La seconde partie de l'énoncé est donc établie.

Il suit de là que *les intervalles séparés par la subdivision*

$$\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \ldots, \alpha'_n, \alpha_{n+1}$$

*vont constamment en décroissant, si le premier surpasse le second.* Car alors, le second doit surpasser le troisième (pour surpasser l'un au moins du premier et du troisième), qui doit surpasser le quatrième, et ainsi de suite.

Dans le cas le plus général, la suite d'intervalles considérés peut comprendre un terme maximum, ou deux termes maximums adjacents, et les autres termes décroissent quand on s'éloigne de part et d'autre de ce ou de ces termes maximums (qui peuvent coïncider avec le premier ou avec le dernier intervalle).

Ces préliminaires étant posés, nous pouvons énoncer les propositions suivantes relatives à *un ensemble parfait* P *présentant le caractère* (A):

I. *Quel que soit le nombre* $\lambda$ *au plus égal à* $b - a$, P *contient deux points dont la distance est* $\lambda$.

Soit en effet $\alpha_1 = a$.

Le segment $\alpha_1 \alpha'_1$ contient et surpasse le segment $s'_1$ séparant $a'a$ de $u'_1$, lequel contient et surpasse $\alpha'_1 \alpha_2$. Or, par hypothèse $a'a$ et $b'b$ ne sont inférieurs en longueur à aucun contigu de P. Donc, $s'_1 \geq u'_1$ (caractère A), et par suite $\alpha_1 \alpha'_1 > \alpha'_1 \alpha_2$. Donc, tous les intervalles séparés par les suites $(\alpha_p, \alpha'_p)$ et $(\beta'_p, \beta_p)$ vont en décroissant.

Je dis que les $\beta'$ étrangers à P demeurent tous sur $ab$. En effet, il en est d'abord ainsi de $\beta'_1$, d'après $\beta'_1 - a = \lambda < b - a$. D'autre part, si $\beta'_n$ est sur $ab$, l'extrémité droite $\beta_n$ du contigu contenant $\beta'_n$ est à gauche de $b$. Si $\beta_n$ est à gauche de $b$, on a $\beta'_n \beta_n > \beta_n \beta'_{n+1}$. Or, $\beta'_n \beta_n < u''_n$. $u''_n$ est séparé de $bb'$ par $\beta_n b$, au moins égal à $u''_n$ (caractère A), d'après $u''_n \leq bb'$. Donc, $\beta_n \beta'_{n+1} < \beta_n b$. Donc, $\beta_n \beta'_{n+1}$ est à gauche de $b$.

Donc, que les suites $(\alpha, \alpha')$ $(\beta, \beta')$ s'arrêtent ou non, elles mettent en évidence un couple $(\gamma, \delta)$ situé sur P et tel que $\delta - \gamma = \lambda$.

Le même raisonnement permet de montrer:

I$^{bis}$. *Si u et v sont deux intervalles contigus ou semi-contigus à* P, *séparés par le segment* $\alpha\beta$ *(*$\alpha$ *et* $\beta$ *appartiennent à* P, $\alpha < \beta$*), et si u et v sont au moins égaux à chacun des intervalles contigus à* P *compris entre* $\alpha$ *et* $\beta$, *il existe, quelque soit le nombre* $\lambda_1$ *au plus égal à* $\beta - \alpha$, *deux points de* P *situés sur le segment* $\alpha\beta$ *et dont la distance est égale à* $\lambda_1$.

II (conséquence du précédent). *Si u et v sont deux intervalles contigus ou semi-contigus à* P, *séparés par un segment* $\alpha\beta$, *il existe, quelque soit le nombre* $\lambda_2$, *au plus égal à u et à v séparément, deux points de* P *situés sur* $\alpha\beta$ *et dont la distance est égale à* $\lambda_2$.

Soit par exemple $u$ à gauche de $v$, avec $u \leq v$ (en longueur) et soit $v_1$ le contigu le plus voisin de $u$ à sa droite, et dont la longueur vaut au moins $u$. $v_1$ coïncide avec $v$ ou est compris entre $u$ et $v$. Le segment $\alpha\beta_1$ séparant $u$ de $v_1$ vaut au moins $u$ (caractère A), d'après $u \leq v$. Il suffit d'appliquer à $\alpha\beta_1$ la proposition I$^{bis}$.

III. *Si l'intervalle u est contigu à* P *et si, sur un segment adjacent à u* *et de longueur* $l$, P *ne possède pas de contigu ni de semi-contigu dont la longueur surpasse* $u$, *il existe alors, quelque soit* $\lambda_3$ *vérifiant* $u \leq \lambda_3 \leq l + u$, *deux points de* P *situés de part et d'autre de* $u$, *et dont la distance est égale à* $\lambda_3$.

Soient $\beta$ et $\alpha$ $(\beta < \alpha)$ les extrémités de $u$. Posons $\alpha = \alpha_1$, $\beta'_1 = \alpha - \lambda_3$ $(u < \lambda_3)$, et soit $\beta_1$ l'extrémité droite du contigu contenant $\beta'_1$, si $\beta'_1$ est étranger à P. Comme dans l'étude préliminaire, les deux subdivisions $(\alpha_p, \alpha'_p)$, $(\beta_p, \beta'_p)$ progresseront vers la droite, mais cette fois, la seconde sera à la gauche de la première (et non pas à sa droite).

La démonstration se compose encore de deux parties, 1°) on a $\alpha\alpha'_1 > \alpha'_1\alpha_2$, si $\alpha'_1$ n'est pas sur P; 2°) $\beta'_p$ et $\beta_p$ restent à gauche de $\beta$, quelque soit $p$.

En effet: 1°) D'après $\lambda_3 \leq u + l$, le semi-contigu $\beta'_1\beta_1$ est par hypothèse au plus égal à $u$. Donc, d'après $s'_1 < \alpha\alpha'_1 = \beta'_1\beta_1$, on a $s'_1 < u$. Donc (caractère A) $s'_1 \geq u'_1$. De $\alpha'_1\alpha_2 < u'_1$ résulte $\alpha\alpha'_1 > \alpha'_1\alpha_2$.

Donc, les intervalles des subdivisions $(\alpha_p, \alpha'_p)$, $(\beta'_p\beta_p)$ vont décroissant en longueur, tant qu'un $\alpha'_p$ ou un $\beta'_p$ n'est pas sur P.

2°) L'inégalité $\beta'_n < \beta$ se démontre de proche en proche. D'abord, $\beta'_1 < \beta$ résulte de $\alpha - \beta'_1 = \lambda_3 > u = \alpha - \beta$. Si maintenant $\beta'_n < \beta$, on a: en évidence, $\beta'_n\beta_n < u''_n$, puis $u''_n \leq u$, par hypothèse, d'où $\beta_n\beta \geq u''_n$ (caractère A), et enfin $\beta'_n\beta_n < \beta_n\beta$. Or, nous avons établi (1°) $\beta'_n\beta_n > \beta_n\beta'_{n+1}$. Donc $\beta_n\beta'_{n+1} < \beta_n\beta$. Donc $\beta_{n+1}$ est à gauche de $\beta$. La proposition III résulte de là.

IV (conséquence du précédent). *Si* $u$ *est un intervalle contigu à* P, *il existe, quelque soit* $\lambda_4$ *vérifiant* $u \leq \lambda_4 \leq 3u$, *deux points de* P *situés de part et d'autre de* $u$ *et dont la distance est* $\lambda_4$.

Car, si $u$ est l'intervalle $\beta\alpha$, et si $\alpha_1 = \beta - 2u$, le segment $\alpha_1\beta$ ne peut pas contenir, en vertu du caractère (A), d'intervalle contigu ou semi-contigu dont la longueur surpasse $u$. La proposition III s'applique donc.

Matematica. — *Spazi che ammettono una traslazione infinitesima lungo le linee di lunghezza nulla.* Nota di O. Onicescu, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. In una Nota precedente abbiamo definito come traslazione infinitesima un movimento elementare di uno spazio (di natura metrica qualsiasi) che sposta le direzioni con parallelismo di Levi-Civita, lungo una congruenza di trajettorie.

Crediamo opportuno di riprendere, sotto una forma più semplice, i calcoli di quella Nota, avendo in vista di considerare anche il caso nel quale *le trajettorie sono linee di lunghezza nulla dello spazio.*