ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

et de longueur l, P ne possède pas de contigu ni de semi-contigu dont la longueur surpasse u, il existe alors, quelque soit λ_3 vérifiant $u \leq \lambda_3 \leq l + u$, deux points de P situés de part et d'autre de u, et dont la distance est égale à λ_3.

Soient β et α $(\beta < \alpha)$ les extrémités de u. Posons $\alpha = \alpha_1$, $\beta'_1 = \alpha - \lambda_3$ $(u < \lambda_3)$, et soit β_1 l'extrémité droite du contigu contenant β'_1, si β'_1 est étranger à P. Comme dans l'étude préliminaire, les deux subdivisions (α_p, α'_p), (β_p, β'_p) progresseront vers la droite, mais cette fois, la seconde sera à la gauche de la première (et non pas à sa droite).

La démonstration se compose encore de deux parties, 1°) on a $\alpha\alpha'_1 > \alpha'_1\alpha_2$, si α'_1 n'est pas sur P; 2°) β'_p et β_p restent à gauche de β, quelque soit p.

En effet: 1°) D'après $\lambda_3 \leq u + l$, le semi-contigu $\beta'_1\beta_1$ est par hypothèse au plus égal à u. Donc, d'après $s'_1 < \alpha\alpha'_1 = \beta'_1\beta_1$, on a $s'_1 < u$. Donc (caractère A) $s'_1 \geq u'_1$. De $\alpha'_1\alpha_2 < u'_1$ résulte $\alpha\alpha'_1 > \alpha'_1\alpha_2$.

Donc, les intervalles des subdivisions (α_p, α'_p), $(\beta'_p\beta_p)$ vont décroissant en longueur, tant qu'un α'_p ou un β'_p n'est pas sur P.

2°) L'inégalité $\beta'_n < \beta$ se démontre de proche en proche. D'abord, $\beta'_1 < \beta$ résulte de $\alpha - \beta'_1 = \lambda_3 > u = \alpha - \beta$. Si maintenant $\beta'_n < \beta$, on a: en évidence, $\beta'_n\beta_n < u''_n$, puis $u''_n \leq u$, par hypothèse, d'où $\beta_n\beta \geq u''_n$ (caractère A), et enfin $\beta'_n\beta_n < \beta_n\beta$. Or, nous avons établi (1°) $\beta'_n\beta_n > \beta_n\beta'_{n+1}$. Donc $\beta_n\beta'_{n+1} < \beta_n\beta$. Donc β_{n+1} est à gauche de β. La proposition III résulte de là.

IV (conséquence du précédent). *Si u est un intervalle contigu à P, il existe, quelque soit λ_4 vérifiant $u \leq \lambda_4 \leq 3u$, deux points de P situés de part et d'autre de u et dont la distance est λ_4.*

Car, si u est l'intervalle $\beta\alpha$, et si $\alpha_1 = \beta - 2u$, le segment $\alpha_1\beta$ ne peut pas contenir, en vertu du caractère (A), d'intervalle contigu ou semi-contigu dont la longueur surpasse u. La proposition III s'applique donc.

Matematica. — *Spazi che ammettono una traslazione infinitesima lungo le linee di lunghezza nulla.* Nota di O. Onicescu, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. In una Nota precedente abbiamo definito come traslazione infinitesima un movimento elementare di uno spazio (di natura metrica qualsiasi) che sposta le direzioni con parallelismo di Levi-Civita, lungo una congruenza di trajettorie.

Crediamo opportuno di riprendere, sotto una forma più semplice, i calcoli di quella Nota, avendo in vista di considerare anche il caso nel quale *le trajettorie sono linee di lunghezza nulla dello spazio.*

2. Sia

$$ds^2 = \sum_1^n {}_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{1}$$

l'elemento lineare di una varietà — la forma quadratica essendo qualsiasi — che ammette un gruppo ∞^1 di movimenti. Sia $Xf = \frac{\partial f}{\partial x_n}$ la forma canonica della corrispondente trasformazione infinitesima, supponendo di aver preso per linee coordinate x_n le trajettorie del movimento.

Le condizioni perchè lo spazio (1) ammetta un tale movimento, sono espresse dalle equazioni di Killing che, come è noto, si riducono in questo caso alla forma

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_n} = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

I parametri $\xi^{(i)}$ (sistema controvariante) di una direzione generica la quale si trasporti lungo una trajettoria subiscono (trattandosi di un movimento rigido) incrementi nulli:

$$d\xi = 0.$$

Lo spostamento per parallelismo richiede invece [1] gli incrementi

$$\delta\xi^{(i)} = -\sum_1^n {}_l \begin{Bmatrix} n\,l \\ i \end{Bmatrix} \xi^{(l)}\, \delta x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nell'ipotesi che si tratti di traslazione elementare, i due spostamenti devono coincidere, cioè gli incrementi $\delta\xi^{(i)}$ devono essere nulli al pari degli $d\xi^{(i)}$. Se ne trae

$$\sum_1^n {}_l \begin{Bmatrix} n\,l \\ i \end{Bmatrix} \xi^{(l)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Queste equazioni (sempre in virtù dell'ipotesi che il movimento abbia carattere traslatorio) devono sussistere qualunque sia la direzione che si trasporta (e lungo qualsiasi trajettoria, il che implica in qualsiasi punto del campo che si consideri). Risulta allora

$$\begin{Bmatrix} n\,l \\ i \end{Bmatrix} = 0 \qquad (i, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Una prima conseguenza relativa al carattere della congruenza $[n]$ costituita dalle trajettorie si ricava subito ricordando le equazioni differenziali

[1] T. Levi-Civita, *Memoria sul parallelismo*, pag 7.

delle geodetiche

$$d^2 x_i + \sum_1^n {}_{jh} \begin{Bmatrix} j\,h \\ i \end{Bmatrix} dx_j\, dx_h = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Lungo ogni trajettoria si ha

$$dx_i = 0 \;\; (i < n) \quad , \quad d^2 x_n = 0 \, ,$$

con che le equazioni precedenti rimangono verificate in virtù delle (4). *La congruenza* $[n]$ *è dunque geodetica.*

Dalle equazioni (4) discende ovviamente

$$\begin{bmatrix} i\,n \\ l \end{bmatrix} = 0 \qquad (i, l = 1, 2, \dots, n)$$

ciò che equivale al sistema

$$\text{A} \qquad \frac{\partial a_{ln}}{\partial x_i} = \frac{\partial a_{in}}{\partial x_l} \qquad (i, l = 1, 2, \dots, n).$$

Per $l = n$, ricordando le (2), risulta, in particolare,

$$\frac{\partial a_{nn}}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n);$$

dunque $a_{nn} = \varepsilon \cdot \alpha^2 = \text{A} \quad (\varepsilon = \pm 1)$.

Il sistema (A) mostra che la forma differenziale lineare

$$\varepsilon \cdot \alpha^2 \cdot dx_n + 2a_{nn-1}\, dx_{n-1} + \cdots + 2a_{n1}\, dx_1 = du$$

è un differenziale esatto.

Possiamo valerci di questa circostanza per semplificare la forma (1) dell'elemento lineare, che scriveremo intanto

$$ds^2 = dx_n \cdot du + \sum_1^{n-1} {}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k \, .$$

La trattazione fino a questo punto vale per ogni congruenza $[n]$. Adesso dobbiamo distinguere due casi:

1°. La congruenza $[n]$ è formata da linee ordinarie ($ds^2 \neq 0$ lungo tali linee, il che implica $\alpha \neq 0$).

Badando alla (6), possiamo scrivere

$$ds^2 = \varepsilon \left(\alpha\, dx_n + \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_1^{n-1} {}_i\, a_{in}\, dx_i \right)^2 + d\sigma^2$$

$d\sigma^2$ essendo una forma quadratica nelle $n-1$ variabili $x_1, \dots, x_{n-1}$.

Se prendiamo allora come nuova variabile x_n l'espressione

$$\frac{1}{\varepsilon \cdot \alpha} u \, ,$$

l'elemento lineare prende la forma canonica geodetica, già studiata nella Nota precedente.

$$(a) \qquad ds^2 = \varepsilon \, dx_n^2 + d\sigma^2 \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

2°. La congruenza $[n]$ è formata da linee di lunghezza nulla. In questo caso, dovendo avere $ds^2 = 0$ lungo una linea n, risulta

$$a_{nn} = \varepsilon \, . \, \alpha^2 = 0 \, .$$

Conviene allora prendere la funzione u precedentemente introdotta, per mezzo del suo differenziale, come una nuova variabile. Posto $x_n = y_n$, facciamo una trasformazione delle altre $n-1$ variabili, assumendo, al posto delle $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, $n-1$ loro combinazioni indipendenti arbitrarie $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, fra le quali figuri u. Porremo, per esempio, $y_{n-1} = u$.

L'elemento lineare si riduce allora alla forma canonica

$$(b) \qquad ds^2 = dy_n \, . \, dy_{n-1} + d\sigma^2 \, ,$$

dove $d\sigma^2$ è una forma quadratica nelle $n-1$ variabili $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

3. Dalla espressione (a), trovata per l'elemento lineare, risulta notoriamente che le ipersuperficie $x_n = \mathrm{A}$ sono geodetiche, cioè contengono interamente la geodetica della varietà passante per due loro punti qualsivogliano.

Tenendo presente questo risultato, si può ancora dimostrare che *una qualsiasi geodetica g, di una superficie $x_n = \mathrm{A}$, genera per traslazione una superficie di curvatura gaussiana nulla.*

Basta pensare che *tale superficie contiene due famiglie di geodetiche ortogonali*: una di queste è costituita dalle successive posizioni della g, e l'altra dalle traiettorie.

Nel caso delle linee di lunghezza nulla, dalla espressione (b) dell'elemento lineare risulta ovviamente che le ipersuperficie $y_n = \mathrm{A}$ non sono, in generale, geodetiche; sono invece geodetiche le varietà $y_n = c^t$, $y_{n-1} = c^t$. *La conclusione precedente vale allora per le superficie generate dalle geodetiche di queste varietà.*