ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

12° Esperimento. — Si colorano in verde 586 anofeli presi nei suddetti locali di Maccarese-Macchine Idrovore, l'8-X e si lasciano in libertà in aperta campagna, a 1 chilometro di distanza, al tramonto; tempo abbastanza favorevole al volo degli anofeli. Condizioni poco differenti permangono durante tutto l'esperimento.

Il 9-X se ne prendono nei soliti locali 742, di cui 55 coloriti in varî stadî di digestione e di sviluppo delle uova (ciò si ripete anche in tutte le altre catture).

Il 10-X 749, di cui 10 coloriti.

L'11-X 665, di cui 3 coloriti.

Nei giorni successivi non se ne pigliano più di coloriti (in verde).

In tutto su 586, se ne ripresero 68.

13° Esperimento. — 14-X Come sopra se ne coloriscono in rosso 627, che si lasciano liberi al tramonto. Vi è molto bestiame in vicinanza al punto dove si lasciano liberi. Durante la notte piove; nei giorni successivi tempo variabile.

Catture nei varî ambienti di Maccarese-Idrovore.

15-X 569, di cui coloriti 11.	20-X 500, di cui coloriti 0.
16-X 425, » » » 9.	21-X 298, » » » 0.
17-X 406, » » » 6.	Sospesa la cattura.
18-X 429, » » » 5.	26-X 249, » » » 0.
19-X 467, » » » 2.	27-X 266, » » » 0.

In tutto su 627 coloriti se ne sono ripresi solo 33. In questo, come nel precedente esperimento, i coloriti si trovarono irregolarmente sparsi nei varî ambienti.

14° Esperimento. — Il 28-X coloriti in rosso 515 e liberati al Canale delle acque alte, interponendo così circa 1 chilometro di macchia (macchia tra il detto canale e le Idrovore di Maccarese).

29-X	catturati	a	Maccarese-Idrovore	170	e	coloriti	0.
30-X	»	»	»	141	»	»	2.
31-X	»	»	»	87	»	»	1.
1-XI	»	»	»	74	»	»	0.

Riassumendo, attraverso la macchia, arrivarono a porcili e stalle delle Idrovore su 515, soli 3.

Matematica. — *Saggi d'una teoria geometrica delle forme binarie.* I: *Idee direttive e loro prime conseguenze.* Nota di ANNIBALE COMESSATTI, presentata dal Corrisp. F. SEVERI.

È noto che la teoria invariantiva delle forme binarie può caratterizzarsi, secondo le suggestive vedute del programma Kleiniano, mediante un gruppo continuo ∞^3 di trasformazioni proiettive dello S_n, che nel caso d'una sola forma d'ordine n, ha come (unica) curva unita una C^n razionale normale [1].

[1] Il caso di più forme binarie, conduce a tutti i tipi di gruppi continui ∞^3 *non integrabili* di trasformazioni proiettive dello S_n. Cfr. la Memoria di Fano, *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè* [Memorie della R. Accad. di Torino (2) XLVI (1896), pp. 187-218], su cui dovremo ritornare diffusamente nella terza di queste Note.

Questa interpretazione è stata additata, ed anche usata per fini particolari da diversi autori [1]; ma non sembra che finora si sia cercato di valersene come mezzo diretto per affrontare i problemi più generali della teoria, ed impostarvi una trattazione sistematica che procedesse indipendentemente dagli indirizzi classici.

Mi è sembrato che qualora un metodo d'indagine inspirato alla predetta interpretazione mostrasse di rispondere agilmente allo scopo, la teoria ne acquisterebbe in qualche punto semplicità e chiarezza, e forse potrebbe guadagnare qualche nuovo contributo. Ed effettivamente, come mi propongo di mostrare in questo saggio ed in altri successivi, estratti da una ricerca di maggior mole a cui sto attendendo, l'uso di alcune semplici idee direttive, sussidiate da elementari considerazioni di geometria iperspaziale, consente di dar veste nuova ad alcuni risultati classici, conducendo agevolmente nel cuore della teoria, e rivelando la sua potenzialità ad adattarsi anche a fini più ardui.

Chiedo mi sia consentito di omettere per brevità qualche calcolo materiale e qualche procedimento di inessenziale importanza.

1. Sia

$$(1)\qquad f(x_1 x_2) \equiv a_x^n \equiv \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x_1^{n-i} x_2^i \equiv x_2^n \bar{f}(x) \ , \ \left(x = \frac{x_1}{x_2}\right),$$

una forma binaria d'ordine n. Interpretando le x_1, x_2 come coordinate omogenee di punto d'una retta r, la $f=0$ rappresenta un gruppo G_n di n punti; se invece si considerano i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n$ come coordinate omogenee di punto in un S_n, ad ogni forma f rimane associato un punto F, che si può considerare come *imagine* di F o del G_n relativo.

In particolare ai gruppi G_n costituiti dai punti $x=\lambda$ di r contati ciascuno n volte, corrispondono in S_n i punti d'una C^n razionale normale, le cui equazioni parametriche sono

$$(2)\qquad \varrho a_i = (-1)^i \lambda^i, \quad \text{oppure} \quad \sigma a_i = (-1)^i x_1^i x_2^{n-i}, \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Nel seguito avremo bisogno di fissare su r, e quindi su C^n, un punto speciale; sceglieremo il punto improprio I ($x=\infty$; $x_1=1$, $x_2=0$) di r, il cui omologo su C^n($a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0$, $a_n=1$) verrà indicato con U.

2. Se si trasforma f mediante una sostituzione lineare

$$(3)\qquad x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \quad , \quad x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \, ,$$

(cioè, seguendo l'uso classico, se nella f al posto delle variabili si pongono

[1] Cfr. Lie (Scheffers), *Vorlesungen über continuerliche Gruppen* [Leipzig, Teubner, 1893], Cap. 23. Vedi anche la Memoria citata di Fano e il lavoro di Brusotti, *Sulla curva razionale normale dello spazio a quattro dimensioni* [Annali di Mat. (3), IX (1904), pp. 311-352].

le forme lineari dei secondi membri) se ne deduce una nuova forma dello stesso ordine f', che eguagliata a zero rappresenta su r il gruppo G'_n trasformato di G_n mediante la proiettività π rappresentata dalla sostituzione lineare inversa della (3). Poichè i coefficienti a'_i di f' sono forme lineari nelle a_i, così alla proiettività π di r resta associata una proiettività Π di S_n, che muta il punto F imagine di f_n nel punto F' imagine di G'_n; e quindi trasforma in se stessa la C^n.

Insomma, come del resto è ben noto, al gruppo γ delle ∞^3 proiettività di r, si viene in tal modo ad associare il gruppo Γ delle ∞^3 proiettività di S_n che mutano in sè la C^n. In particolare al sottogruppo ω delle similitudini di r risponde un sottogruppo ∞^2, Ω, di Γ, costituito da tutte le proiettività di Γ che lasciano fisso U, e che brevemente denomineremo *gruppo delle similitudini di* C^n.

3. Sia ora

$$(4) \qquad \Phi(x_1 x_2) \equiv \sum_{i=0}^{m} \varphi_i(a_0 a_1 \dots a_n)\, x_1^{m-i} x_2^i \equiv x_2^m \overline{\Phi}(x),$$

una *forma invariantiva* di *grado* l nei coefficienti di f, e d'*ordine* m nelle variabili, cioè un *covariante* se $m > 0$, un *invariante* se $m = 0$. Fissate le a_i, la $\Phi = 0$ rappresenta su r un G_m covariante proiettivo del G_n ($f = 0$); se invece si fissano le x_1, x_2 e quindi un punto P di C^n, la $\Phi = 0$ rappresenta una ipersuperficie Δ_P di S_n variabile con P in un sistema Σ, ∞^1, d'*indice* m.

Se $m = 0$ tutte le Δ_P coincidono in un'unica ipersuperficie Δ invariante per le trasformazioni di Γ. Questa interpretazione degli invarianti è ben nota, come lo sono le Δ corrispondenti agli invarianti più semplici. Così la V_{n-1} degli S_{n-2} osculatori di C^n corrisponde al *discriminante* di f, la *quadrica di Clifford* al noto invariante quadratico delle forme d'ordine pari, ecc. In generale ogni V_{n-1} che sia definita da date relazioni proiettive con C^n, ha una equazione nelle a_i che si ottiene eguagliando a zero un invariante di f (¹).

4. Ritorniamo ora al caso generale. Ognuna delle Δ_P è evidentemente mutata in sè dalle ∞^2 trasformazioni di Γ che lasciano fisso P; in particolare la Δ_U è dunque invariante per il gruppo delle similitudini di C^n.

Poichè l'equazione di Δ_U si ottiene eguagliando a zero il *primo coefficiente* φ_0 di Φ, così la forma $\varphi_0(a_0, a_1, \dots, a_n)$ che d'ora in poi indicheremo con φ, cioè colla lettera minuscola corrispondente al simbolo del covariante, è invariante per le trasformazioni di Ω, cioè, secondo la denominazione classica, è un *seminvariante* di f.

(¹) Per $n = 4$ cfr. le Memorie citate di Fano e Brusotti.

Viceversa, dato un seminvariante φ, cioè una Δ_{U} invariante per le trasformazioni di Ω, applicando a Δ_{U} le trasformazioni di Γ, se ne deduce un sistema Σ di ∞^1 ipersuperficie Δ_{P} ciascuna delle quali è mutata in sè dalle ∞^2 trasformazioni di Γ che lasciano fisso il punto P di C^n; e quindi un covariante di f.

Ne segue il noto teorema classico: *Ogni covariante d'una forma binaria è individuato dal suo primo coefficiente o termine principale* φ (*source, Leitglied, leading term*).

La condizione imposta a $\varphi = 0$, cioè a Δ_{U}, d'essere invariante per le trasformazioni di Ω, si trasforma facilmente in condizioni formali espressive. Basta applicare a $\varphi = 0$ le trasformazioni infinitesime di Ω; e si vede allora che *φ è caratterizzata dall'essere funzione isobarica delle a_i soddisfacente all'equazione differenziale caratteristica*

$$\sum^{n} i\, a_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0. \tag{5}$$

Analisi matematica. — *Sur les ensembles parfaits présentant le caractère* (A). Nota di ARNAUD DENJOY, presentata dal Socio VITO VOLTERRA.

Les définitions et résultats contenus dans ma précédente Note [1], permettent d'établir le théorème suivant:

V. *Si* P *possède la caractère* (A), *il existe, quels que soient:* 1°) M *sur* P; 2°) *la longueur* $4l \leq 4(b-a)$ *d'un segment* AB *de milieu* M, *il existe deux points de* P *appartenant au segment* AB, *et dont la distance est* l.

Soient respectivement u et v les plus grands intervalles contigus à P ayant des points, le premier à l'intérieur de AM, le second à l'intérieur de MB. Soit, par exemple, u, ou $a_1\alpha$, le plus petit des deux (ou l'un des deux, s'ils sont égaux). Si $u \geq l$, le théorème à démontrer résulte de la proposition II. Supposons donc $u < l$.

Soit v_1 l'intervalle contigu situé sur le segment MB, et le plus près possible de u, et au moins égal à u en longueur. v_1 peut coïncider avec v. Si le segment $\alpha\beta_1$, séparant u de v, vaut au moins l, la proposition V résulte du théorème I^{bis}. Supposons cette distance inférieure à l. Alors, puisque β_1 est en M ou à sa droite, α est à droite du milieu A_1 de AM, et, d'après $a_1\alpha < l$, a_1 est intérieur au segment AM. Le segment Aa_1

(1) V. questi Rendiconti, pag. 291.