# ATTI
DELLA
# REALE ACCADEMIA NAZIONALE
# DEI LINCEI
ANNO CCCXVII.
1920

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXIX.**

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI
1920

Viceversa, dato un seminvariante $\varphi$, cioè una $\Delta_U$ invariante per le trasformazioni di $\Omega$, applicando a $\Delta_U$ le trasformazioni di $\Gamma$, se ne deduce un sistema $\Sigma$ di $\infty^1$ ipersuperficie $\Delta_P$ ciascuna delle quali è mutata in sè dalle $\infty^2$ trasformazioni di $\Gamma$ che lasciano fisso il punto P di $C^n$; e quindi un covariante di $f$.

Ne segue il noto teorema classico: *Ogni covariante d'una forma binaria è individuato dal suo primo coefficiente o termine principale* $\varphi$ (*source, Leitglied, leading term*).

La condizione imposta a $\varphi = 0$, cioè a $\Delta_U$, d'essere invariante per le trasformazioni di $\Omega$, si trasforma facilmente in condizioni formali espressive. Basta applicare a $\varphi = 0$ le trasformazioni infinitesime di $\Omega$; e si vede allora che *$\varphi$ è caratterizzata dall'essere funzione isobarica delle $a_i$ soddisfacente all'equazione differenziale caratteristica*

$$\sum^{n} i a_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0. \tag{5}$$

## Analisi matematica. — *Sur les ensembles parfaits présentant le caractère* (A). Nota di ARNAUD DENJOY, presentata dal Socio VITO VOLTERRA.

Les définitions et résultats contenus dans ma précédente Note [1], permettent d'établir le théorème suivant:

V. *Si* P *possède la caractère* (A), *il existe, quels que soient:* 1°) M *sur* P; 2°) *la longueur* $4l \leq 4(b-a)$ *d'un segment* AB *de milieu* M, *il existe deux points de* P *appartenant au segment* AB, *et dont la distance est* $l$.

Soient respectivement $u$ et $v$ les plus grands intervalles contigus à P ayant des points, le premier à l'intérieur de AM, le second à l'intérieur de MB. Soit, par exemple, $u$, ou $a_1\alpha$, le plus petit des deux (ou l'un des deux, s'ils sont égaux). Si $u \geq l$, le théorème à démontrer résulte de la proposition II. Supposons donc $u < l$.

Soit $v_1$ l'intervalle contigu situé sur le segment MB, et le plus près possible de $u$, et au moins égal à $u$ en longueur. $v_1$ peut coïncider avec $v$. Si le segment $\alpha\beta_1$, séparant $u$ de $v$, vaut au moins $l$, la proposition V résulte du théorème $I^{bis}$. Supposons cette distance inférieure à $l$. Alors, puisque $\beta_1$ est en M ou à sa droite, $\alpha$ est à droite du milieu $A_1$ de AM, et, d'après $a_1\alpha < l$, $a_1$ est intérieur au segment AM. Le segment $Aa_1$

[1] V. questi Rendiconti, pag. 291.

ne contient pas de contigu ni de semi-contigu supérieur à $u$. D'ailleurs $u < l < A\alpha_1$. Donc il existe (proposition III) deux points $\gamma, \delta$ de P, contenant entre eux $u$ et dont la distance est $l$. $\gamma$ est à gauche de $\alpha$, donc de M. Donc $\delta$ est à gauche de $B_1$, milieu de MB. $\delta$ est à droite de $a_1$, donc de $A_1$. Donc $\gamma$ est à droite de A. Donc $\gamma$ et $\delta$ appartiennent au segment AB.

Le théorème V est démontré dans tous les cas.

Donnons un exemple général d'ensemble parfait P auquel s'appliquent les considérations précédentes.

Supposons que P satisfasse à cette condition, que si M et M' sont deux quelconques de ses points, il existe sur P, d'un côté ou de l'autre de M, un point M'', tel que dist. MM'' $<$ dist. MM' $\leq$ 2 dist. MM''. [Le coefficient 2 pourrait être remplacé par la racine réelle (et positive) de l'équation $t^3 - t^2 - t - 3 = 0$].

Je dis que P *possède le caractère* (A).

Sinon, il existerait deux intervalles contigus, $u$ ou $a_1\alpha$, $v$ ou $\beta b_1$, tels que $\alpha\beta$ fût inférieur à $u$ et à $v$. Supposons par exemple $0 < \beta - \alpha < u \leq v$. On montre immédiatement, en plaçant M' en $a_1$ ou en $b_1$, et M sur le segment $\alpha\beta$, que le segment ayant même milieu que $\alpha\beta$, et égal à son tiers, est (entièrement) intérieur à un contigu $a_2 b_2$ de P. Mais alors, il est visible que, si l'on place M en $\alpha$ et M' en $b_2$, M'' n'existe pas.

Les méthodes employées dans ma précédente note permettent de démontrer le théorème suivant:

*Supposons que:* 1°) P *et* P' *sont deux ensembles parfaits présentant le caractère* (A); 2°) $u$ *et* $v$ *sont deux intervalles contigus ou semi-contigus à* P, *séparés par le segment* $\alpha\beta$, *et non surpassés en longueur par aucun des contigus à* P *situés sur* $\alpha\beta$; 3°) $u', v', \alpha'\beta'$ *ont des définitions et des propriétés analogues relatives à* P'; 4°) *au cas où* $\beta' - \alpha' \neq \beta - \alpha$ *et si par exemple* $\beta' - \alpha' > \beta - \alpha$, *l'un (le plus grand, s'ils sont inégaux) des deux intervalles* $u'$ *et* $v'$ *est au moins égal à tout contigu de* P *situé sur* $\alpha\beta$;

*sous ces conditions suffisantes, si* $x$ *et* $y$ *désignent respectivement les abscisses d'un point quelconque de* P *situé sur* $\alpha\beta$, *et d'un point quelconque de* P' *situé sur* $\alpha'\beta'$, *l'ensemble des nombres* $y - x$ *forme un segment continu.*

Application. — *Supposons que:* 1°) P *présente le caractère* (A); 2°) *si* $u$ *et* $v$ *sont deux contigus ou semi-contigus de* P *séparés par* $\alpha\beta$ *et tels que tous les contigus compris entre* $u$ *et* $v$ *sont au plus égaux, d'une part à* $v$, *d'autre part à* $\left|\frac{p}{q}\right| u$, si $|p| \leq |q|$;

*sous ces conditions suffisantes,* $x$ *et* $y$ *désignant les abscisses de deux points quelconques de* P *situés sur* $\alpha\beta$, *et* $p$ *et* $q$ *deux nombres indépendants de* $x$ *et de* $y$, *l'ensemble des nombres* $px + qy$ *est un segment continu.*

L'une des configurations les plus intéressantes présentant le caractère (A) est celle de l'ensemble parfait classique de Cantor, obtenu en extrayant d'un segment $ab$ l'intervalle occupant le tiers médian de $ab$, en opérant ensuite de même sur chacun des deux segments restants, et en continuant indéfiniment ainsi. Les démonstrations peuvent en ce cas s'appuyer sur l'expression des points de $P_0$ dans le système numérique de base 3.

## Mineralogia. — *Nuova giacitura di minerali presso Roma.* Nota dell'ing. Enrico Clerici, presentata dal Corrisp. F. Millosevich.

Le escavazioni per le cave di ghiaia, ora abbandonate, nella valle ad est del monte della Farnesina e lungo la strada d'allacciamento della via Flaminia con la via Cassia mostrano un grosso strato di calcare terroso, talvolta potente 3 a 4 m., che spicca, per il suo bianco colore, fra le soprastanti sabbie marnoso-argillose grigie o giallastre con vestigia di molluschi limnici e le sottostanti sabbie cenerognole con le quali termina superiormente il giacimento di ghiaia, rinomato per i resti di mammiferi della nota fauna quaternaria detta di Ponte Molle. Nella collinetta a sinistra del fosso la Crescenza, presso il Sepolcro dei Nasoni, il calcare giace su materiale tufaceo marnoso con molluschi limnici, diatomee e potamospongie.

Per solito tale calcare si sgretola facilmente, fra le dita, in polvere sabbiosa, arida al tatto. Il colore è generalmente bianco, con puntini bruno-nerastri, ferruginosi e manganesiferi [1]. In acido cloridrico diluito fa viva effervescenza, ma non vi si scioglie completamente. L'inaspettato contenuto del residuo, in tutti i saggi, ne richiedeva il dosamento. Tre campioni medî di 50 grammi ciascuno, mi hanno dato:

| | |
|---|---|
| 1. Farnesina, correzione strada sotto la ferrovia . | 9,78 % |
| 2. Valle ad est del Monte della Farnesina . . . | 13,62 % |
| 3. Collinetta presso il Sepolcro dei Nasoni . . . | 15,13 % |

Nel residuo può distinguersi una parte d'aspetto sabbioso, che si depone rapidamente nell'acqua di lavatura; ed altra parte, molto tenue, quasi gelatinosa, di lentissima deposizione. Lavato e disseccato, il residuo presentasi come massa bianca sfarinabile fra le dita, cui aderisce. Quello proveniente da calcare giallognolo è più o meno colorato da sequiossido di ferro.

(1) Isolati dalla roccia e fusi con soda e nitro dànno massa verde (Mn): immessi, sul portaoggetti, in una goccia di acido iodidrico questo assume intensa colorazione giallo-rossastra e, tirando a secco su fiammella, si hanno minutissimi cristalli e raggruppamenti dendriformi rossi, deliquescentissimi in liquido che col tempo si scolora (Fe).